Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0757.03.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ КУРС

ЮНИТА 3

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

МОСКВА 2001

Разработано Д.Х.Керимовой, И.А. Красовской

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ КУРС

Юнита 1. Элементы математической логики. Теория множеств. Функции.
Юнита 2. Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия.
Юнита 3. Основы математического анализа.
Юнита 4. Краткий курс теории вероятностей.

ЮНИТА 3

При составлении данного пособия авторы широко использовали опыт своих предшественников. Особо мы хотели бы отметить, что заимствовали (с любезного разрешения автора) текстовые задачи из [2]. Ссылки на источники в тексте минимальны и список литературы заметно шире.

Имея в виду интересы и профиль наших студентов, мы старались в первую очередь сделать изложение наглядным, порой сознательно пренебрегая изысками математической строгости.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета.

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

ISBN 5-8323-0057-2

0757.012.03.99.01;1/11.13.Тир.50000

© СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 1999

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 6
ГЛАВА I. Начала математического анализа 6
§1. Понятие функции, предела функции 6
§2. Способы задания функции 7
§3. Некоторые классы функций 8
§4. Основные элементарные функции 10
§5. Обратные функции 13
§6. Понятие предела. Предел последовательности 14
§7. Понятие предела функции 17
§8. Бесконечно малые и бесконечно большие переменные величины . . 18
§9. Основные свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы 19
§10. Точки разрыва функции. Непрерывность функции 24
ГЛАВА II. Понятие производной. Применение производной для исследования функции 25
§1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл 25
§2. Основные правила дифференцирования 28
§3. Производные высших порядков 30
§4. Экстремумы функций 30
§5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба 33
§6. Асимптота графика функции 34
§7. Общее исследование функции 34
Глава III. Неопределенный интеграл 38
§1. Понятие первообразной и неопределенный интеграл 38
§2. Основные методы интегрирования 39
ГЛАВА IV. Определенный интеграл 43
§1. Задача о площади. Понятие определенного интеграла 43
§2. Вычисление определенного интеграла 46
§3. Несобственные интегралы 50
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 52
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 61
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 64
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 77
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Последовательность, формула простых и сложных процентов. Переменная функция (область определения функции, четные и нечетные функции). Производная и дифференциал (определение производной, основные формулы нахождения производной, нахождение дифференциала). Исследование функции, построение графика. Первообразная функция, неопределенный и определенный интегралы (определение, основные формулы и способы интегрирования). Задача вычисления площади криволинейной трапеции.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2. М., 1978.

2. Сафро В.М. Сборник заданий по дисциплине «Высшая математика». М., 1996.

Дополнительная

3. Никольский С.М. Элементы математического анализа. М., 1981.

4. Хавинсон С.Я. Лекции по интегральному исчислению. М., 1976.

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1977.

6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. М., 1968.

7. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т.1,2. М., 1978.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М., 1963.

9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М., 1986.

10. Чижик Е.С., Осиленкер Б.П. Основы математического анализа: Юнита 2. М.:СГУ, 1996.

11. Осиленкер Б.П. Основы математического анализа: Юнита 3. М.:СГУ, 1996.

12. Красовская И.А., Осиленкер Б.П. Основы математического анализа: Юнита 2. М.:СГУ, 1996.

ГЛАВА I. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§1. Понятие функции, предела функции

При изучении различных явлений природы, а также при решении инженерных, технических задач мы замечаем, что одни величины сохраняют одно и то же численное значение, а другие величины связаны между собой определенной зависимостью.

Величины первого вида принято называть постоянными. Примерами таких величин могут служить: отношение длины окружности к своему диаметру (число π), отношение диагонали квадрата к его стороне, равное $\sqrt{2}$ и др.

Примерами величин другого типа могут служить: 1) зависимость площади круга от его радиуса $S=\pi r^2$, где S - площадь круга, r - радиус круга; 2)величина заработка рабочего при сдельной оплате труда зависит от фактической выработки и др.

Следует заметить, что радиус круга r, фактическая выработка рабочего не могут быть отрицательными величинам и каждому значению этих величин соответствует значение S площади круга в первом примере и величина заработка - во втором.

Обобщая эти примеры, можно получить следующие определения.

Если каждому элементу x из множества D по некоторому правилу (закону) ставится в соответствие единственный элемент y другого множества M, то говорят, что между элементами (переменными) x и y **существует функциональная зависимость**; при этом переменную величину x называют **независимой переменной**, или аргументом, а переменную величину y – **зависимой переменной**, или **функцией**.

В приведенных примерах площадь круга S есть функция аргумента r; заработок при сдельной оплате труда есть функция производительности труда рабочего.

Функциональную зависимость между независимой переменой x и зависимой y коротко записывают так: y=f(x) или более подробно $x \in D \xrightarrow{f} y = f(x) \in M$.

Последняя запись, хоть и более наглядная, но громоздкая, употребляется редко, и мы не будем пользоваться ею.

Здесь множество D называется **областью определения** (или областью существования) функции, а множество M – областью значения функции.

Функция f может быть задана на множестве N натуральных чисел:

$$n \in N \xrightarrow{f} x_n = f(n) \in M \cdot$$

Такая функция называется функцией натурального аргумента, или числовой последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с общим членом x_n.

---

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

Например, $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$.

Буква f является символом правила, по которому значениям аргумента ставятся в соответствие значения функции. Если при каком-либо исследовании рассматриваются различные функции, то при их символической записи могут использоваться различные буквы: f(x), φ(x), F(x), q(x) и т.д.

Замечание. В некоторых задачах физики, экономики приходится иметь дело с функциями, зависящими от нескольких переменных.

Например, площадь параллелограмма определяется произведением основания на высоту S=x y, а объем параллелепипеда – произведением трех его измерений V=x y z.

Функция дохода в задачах экономики также является функцией нескольких переменных.

§2. Способы задания функции

Функция считается заданной, если приведено правило для определения значения функции, соответствующего данному значению аргумента.

Такое правило может быть представлено различными способами. Наиболее часто встречающимися из них являются: аналитический, графический и табличный.

Аналитический способ состоит в том, что задается формула (аналитическое выражение), указывающая какие действия и в каком порядке следует выполнить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции.

Если функция задается только с помощью аналитического выражения без каких-либо дополнительных условий, то под ее областью определения понимают совокупность всех тех значений аргумента, для которых это выражение имеет смысл. Например, областью определения функции $y = \frac{x^2}{x^2+5}$ является интервал $-\infty<x<+\infty$;

для функции $y = \frac{2x}{x+5}$ - вся числовая ось с «выколотой» точкой x= - 5, а для функции $y = \sqrt{4-x^2}$ - отрезок $-2 \le x \le 2$ и т.д.

Бывает, что функция может быть задана двумя или большим числом формул. Так, например, функция y = | x | задается двумя формулами:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } 0 \le x < \infty, \\ -x, \text{если } -\infty < x < 0 \end{cases}$$

В рассмотренных примерах функция y была задана как **явная функция** в виде y = f(x). Функция может быть задана также и в **неявном виде** уравнением

F(x, y) =0, не разрешенном относительно y. Например, уравнение $x^2+y^2=R^2$ или $x^2+y^2-R^2=0$ задает неявную функцию y.

Графический способ задания функции состоит в том, что в данной системе координат задается некоторая кривая. Абсцисса каждой точки кривой дает значение аргумента x, а ордината той же точки - соответствующее значение функции y.

Одним из преимуществ графического представления функции является его наглядность. По графику непосредственно видны основные свойства функции, весь ход ее изменения.

Результаты некоторых наблюдений представляются в виде графика, для этого применяются самопишущие приборы. Так, термограф дает кривую зависимости температуры от времени.

Недостатком графического способа задания функции является ограниченная точность определяемых значений y.

Табличный способ состоит в том, что функциональная зависимость задается в виде таблицы, содержащей ряд числовых значений аргумента и соответствующих им значений функции. Этот способ наиболее удобен, когда зависимость между переменными величинами изучается по результатам наблюдений. В частности, таблица является средством четкого отражения интересующих экономиста показателей, характерных для исследуемого периода. Так, например, для служащих банка представляет интерес таблица изменения курса доллара за определенный промежуток времени.

В случае, когда аналитическая зависимость для некоторых специальных функций сложна, создаются таблицы значений этих функций. Такова, например, таблица значений применяемой в теории вероятностей функции Ф(x). Кроме того, для облегчения вычислений с часто встречающимися функциями, составляют их таблицы, так, например, таблицы квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, логарифмов, тригонометрических функций и т.д.

§3. Некоторые классы функций

1. Четные и нечетные функции.

При исследовании функций бывает полезно знать, как влияет перемена знака аргумента на значение функции. В связи с этим выделяются четные и нечетные функции.

Функция y = f(x) называется четной, если f(-x) = f(x) для всех x из области определения. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 1).

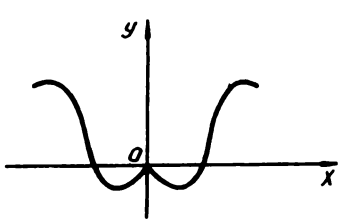


Рис. 1.

Примерами четных функций являются функции

$$y=x^2;\ y=\cos x;\ y=\frac{\sin x}{x};\ y=|x|$$

Функция y = f(x) называется нечетной, если f(-x) = - f(x) для всех x из области определения.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2).

Нечетными, например, являются функции $y=x, y=x^3$; y= tgx.

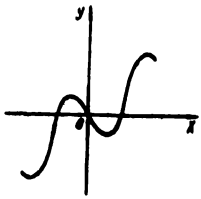


Рис. 2.

Для прочих функций эти особенности не имеют место. Например функции $y = \frac{x+2}{x^2+5}$ или y=sinx+cosy не являются ни четными ни нечетными, их графики не симметричны ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.

2. Периодические функции.

Функция y=f(x) называется периодической, если существует такое постоянное число T≠0, что f(x ± T) = f(x) в области определения функции. При этом наименьшее из положительных чисел T, удовлетворяющих данному свойству, называется **периодом**. Примером периодических функций служат тригонометрические функции y = sinx, y = cosx, y = tgx и y = ctgx. Период первых двух функций равен 2π, а две последние имеют период равный π. График периодической функции достаточно построить на отрезке длины T, далее эта кривая повторяется на всю область существования функции.

3. Монотонные функции.

Функция y = f(x) называется **возрастающей** (убывающей) на интервале (a,b), принадлежащем области существования этой функции, если большему значению аргумента x в этом интервале соответствует большее (меньшее) значение

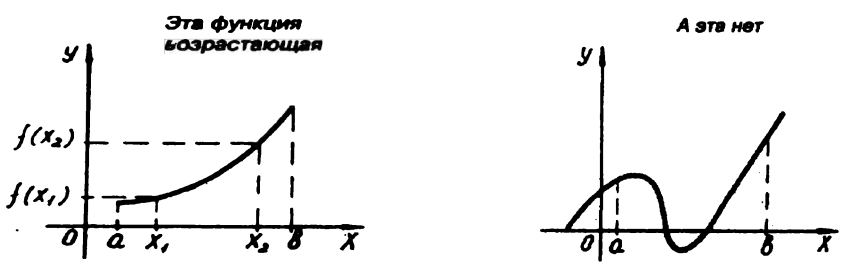


Рис. 3.

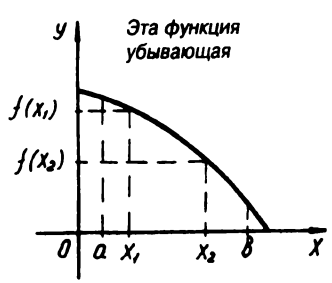


Рис. 4.

функции. Это значит, что для любых значений $x_1 < x_2$ имеем неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а в случае убывания - неравенству $x_1 < x_2$ соответствует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 3,4).

Если функция y = f(x), определенная на интервале, является только возрастающей или только убывающей на этом интервале, то она называется **монотонной** на интервале.

4. Ограниченные функции.

Функция y = f(x), заданная на интервале (a,b), называется ограниченной на этом

интервале, если существует такое положительное число M>0, что для всех x из данного интервала верно неравенство $|f(x)| \leq M$.

Например, тригонометрические функции y = sin x и y = cos x ограничены на всей области их существования и число M для них равно 1.

График ограниченной функции лежит в полосе $-M \leq y \leq M$ (рис. 5).

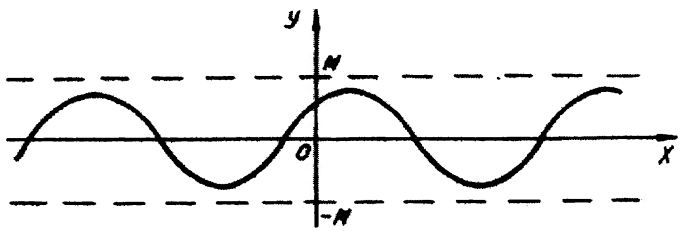


Рис. 5.

§4. Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

I. Степенная функция: $y=x^{\alpha}$, где α- действительное число.

II. Показательная функция: $y = a^x$, где a - положительное число, не равное единице.

III. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где a - положительное число, не равное единице.

IV. Тригонометрические функции:

y = sin x, y = cos x, y = tg x, y = ctg x.

V. Обратные тригонометрические функции:

y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arcctg x.

Рассмотрим области определения и графики основных элементарных функций.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$.

1. $\alpha = 0$, y=const (рис. 6,a).

2. $\alpha \in N$, функция определена на всей числовой оси (рис.6. в,c,d).

3. α - целое отрицательное число. Функция определена при всех значениях x кроме нуля ($x \neq 0$) (см. рис. 6,e).

На рис.6 f,g изображены графики степенных функций при некоторых дробно-рациональных значениях α.

Показательная функция (рис. 7) $y = a^x$ определена для всех x и положительна. При a > 1 она монотонно возрастает, при 0 < a < 1 монотонно убывает.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ (рис. 8) определена для всех x > 0. Число a называется основанием логарифма.

При a > 1 функция монотонно возрастает, при 0 < a < 1 – монотонно убывает.

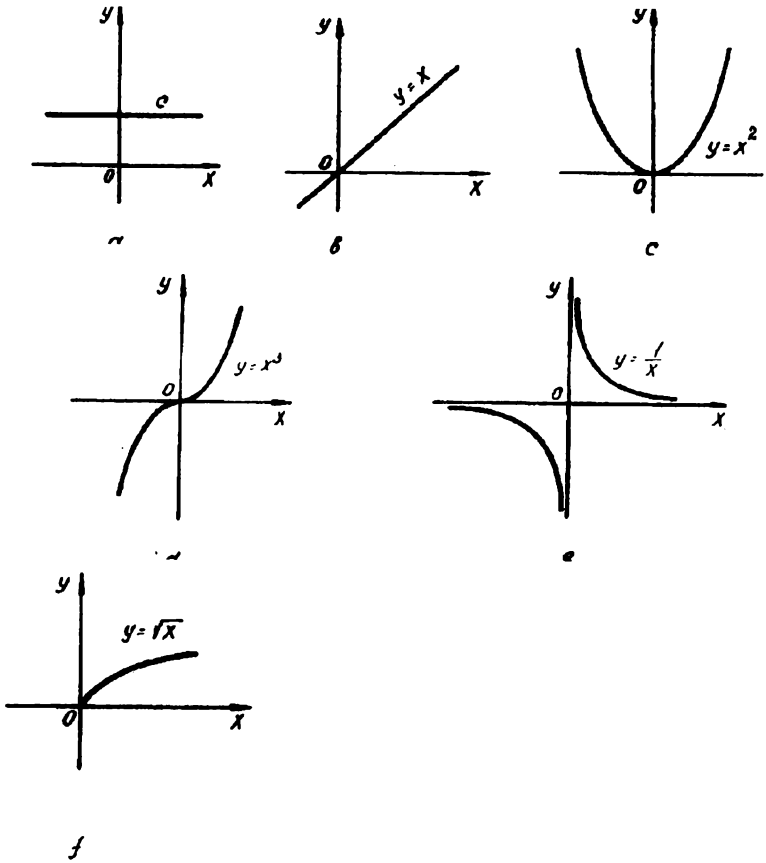


Рис. 6.

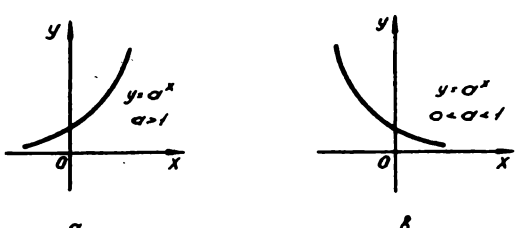
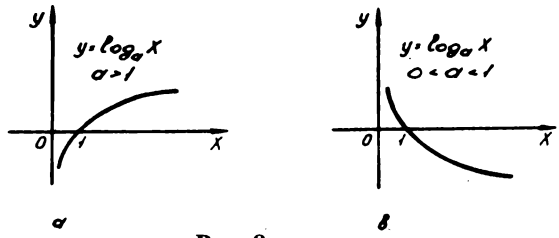


Рис. 7.

Замечание.

Особую роль в математическом анализе, теории вероятностей играют показательная и логарифмическая функции с основанием e = 2,71828..., т.е. функции $y = e^x$ и $y = \log_e x$. Последнюю функцию записывают обычно в виде y = ln x и называют **натуральным логарифмом** числа x.

На практике часто используются логарифмы по основанию 10, или



а в

Рис. 8.

десятичные логарифмы. Для десятичного логарифма принята сокращенная запись y = lg x.

Тригонометрические функции.

Функции y = sin x, y = cos x определены при всех значениях x, функция y=tgx определена на всей числовой оси, кроме точек $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, (k = 0, ±1, ±2,...).

Функция y = ctg x определена на всей числовой оси, кроме точек $x=k\pi$, (k = 0, ±1, ±2...).

Графики тригонометрических функций изображены на рис. 9 (a,b,c,d).

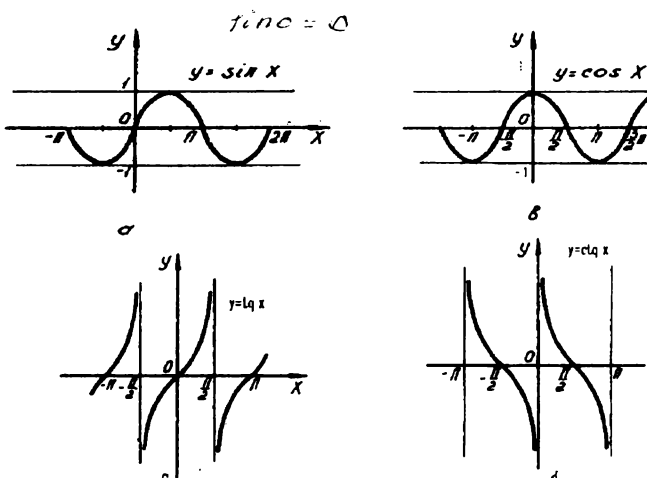


Рис. 9.

Более подробно об обратных тригонометрических функциях, см. [1], стр. 93 - 97.

Со степенными функциями тесно связаны следующие функции, которые называются алгебраическими:

1. **Многочлен (полином)-целая рациональная функция**:

$y= a_0x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, $(a_n \neq 0)$,

здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ - постоянные числа, называются коэффициентами; $n \in N$ степень многочлена. Функция определена на всей числовой оси.

2. **Дробно-рациональная функция**. Эта функция определяется как отношение двух многочленов

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}.$$

Эта функция определена всюду, кроме точек, в которых, знаменатель равен нулю.

Сложные функции. Пусть даны две функции y=f(u) и u =φ(x), причем множество значений функции φ(x) является подмножеством области определения функции f(u). Сложной функцией (или функцией от функции, или композицией функций) y=f[φ(x)] называется функция, определенная следующим образом: каждому значению x из области определения функции φ(x) соответствует такое значение y, что y = f(u), где u= φ(x). Переменная u называется **промежуточным аргументом** сложной функции. Например, функцию $y = \sqrt{\sin x}$ можно записать в виде $y = \sqrt{u}$ где u=sinx. Здесь мы имеем цепочку из двух звеньев. На практике встречаются и более сложные зависимости.

С помощью понятия сложной функции можно дать определение элементарной функции - основного класса функций, изучаемых в математическом анализе.

Элементарной функцией обычно называют перечисленные выше основные элементарные функции, а также функции, которые можно получить из них с помощью конечного числа арифметических операций и построения сложных функций.

Очевидно, что основные элементарные функции относятся к классу элементарных функций.

Примеры элементарных функций:

1. y=|x|.
2. y=lg(1 + sinx).
3. $y = \begin{cases} x, \text{если } 0 \le x \le 1 \\ 3x - 2, \text{если } 1 < x < 3 \end{cases}$

Замечание. При решении прикладных задач возникают функции, не являющиеся элементарными.

§5. Обратные функции

Пусть функция y = f(x) отображает область определения D на область значений M взаимно однозначно, т.е. каждому значению x из D соответствует единственное значение y из M и обратно, каждому y из M соответствует

единственное значение x из D. Тогда можно задать функцию x=φ(y), **обратную к** y=f(x) **следующим образом:**

если каждому

$$x \in D \xrightarrow{f} y = f(x) \in M,$$

то каждому

$$y \in M \xrightarrow{\varphi} x = \varphi(x) \in D.$$

Обе эти функции f и φ называются взаимно обратными.

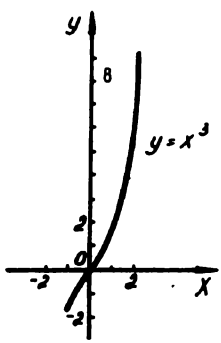


Рис. 10.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^3$ для всех $x \in [-1,2]$. График этой функции представлен на рис. 10.

Эта функция отображает отрезок [-1,2] (область определения функции) на отрезок [-1, 8] (область значения функции). Рассмотрим равенство $y=x^3$ как уравнение относительно x . Разрешив это уравнение относительно x, получим функцию $x = \sqrt[3]{y}$, заданную на отрезке [-1,8], обратную данной и отображающую отрезок [-1, 2].

Замечание. Если функции y= f(x) и y= φ(x) взаимно обратные, то их графики симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

§6. Понятие предела. Предел последовательности

Понятие предела является фундаментальным в математическом анализе. Начальные сведения о пределах встречаются еще в школьном курсе. Так, например, в алгебре с понятием предела связан вопрос о сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии; в геометрии - вопрос о вычислении длины окружности, площадей круга и поверхностей, объемов круглых тел.

В курсе математического анализа с помощью предела вводятся понятия производной, определенного интеграла.

Предварительно ознакомимся с понятием числовой последовательности и рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Пенсионер вложил свою пенсию P рублей в банк A. Банк производит начисление процентов один раз в год по ставке простого процента. Пусть i - процентная ставка (десятичная дробь), P - первоначальный вклад. К концу первого года начисления по процентам составят Pi рублей, а наращенная сумма будет равна P+Pi = P(1 +i) рублей. В конце второго года начисление по процентам вновь будет равно Pi, наращенная сумма - P(1+i)+Pi=P(1+2i) рублей, и т.д. К концу n-го периода наращенная сумма будет составлять P(1 +ni) рублей. Таким образом, процесс изменения суммы вклада с начисленными простыми процентами можно описать в виде арифметической прогрессии:

P; P(1 +i); P(1 +2 i); P(1+3i);...; P(1+ni).

Принято суммарную величину вклада в конце n - го периода обозначать буквой S, а равенство

S=P(1+ni)

называют **формулой простых процентов**, величину (1 +ni) – **множителем наращения простых процентов**.

Отвлечемся теперь от смысла поставленной задачи и введем следующие обозначения:

$a_0 = P$; $a_1 = P(1+i)$; $a_2 = P(1 + 2i)$;...; $a_n = P(1 + ni)$.

Таким образом, мы получили некоторую **конечную** последовательность чисел

$a_0; a_1; a_2;...,a_n$ или $\{a_n\}$.

Величина a_n называемая **n - ым (общим) членом последовательности**, является функцией своего номера n, функцией натурального аргумента

$a_n = f(n)$.

Пример 2. Пусть второй пенсионер вложил свою месячную пенсию P рублей в другой банк B. Этот банк также производит начисление процентов один раз в год, но по ставке сложных процентов, присоединяя начисленные проценты к сумме вклада (эта процедура называется **капитализация процентов**). Если P - первоначальный вклад, i- годовая процентная ставка, то к концу первого года проценты, как и прежде, равны Pi рублей, а наращенная сумма вновь составит величину P+ Pi= P (1 + i) рублей. К концу второго года она достигнет величины $P(1 +i) +P(1 +i) i =P(1 +i)^2$, и т.д. В конце n - го года наращенная сумма составит

$S=P(1+i)^n$ рублей.

Это формула сложных процентов, а величина $(1 +i)^n$ называется **множителем наращения сложных процентов**. Итак, рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической прогрессии, первый член который равен P, а знаменатель - (1 +i). Прогрессия состоит из следующих членов: $P; P(1 +i); P(1+i)^2;...;P(1+i)^n$

Если вновь ввести следующие обозначения

$b_0; b_1= P(1+i); b_2= P(1+i)^2,...., b_n= P(1+i)^n$,

получим числовую последовательность

$b_0; b_1; b_2; ...;$ или $\{b_n\}$ с общим членом $b_n= P(1+i)^n$.

Говорят, что числовая последовательность $\{b_n\}$ задана формулой $b_n= P(1+i)^n$, которая вполне определяет эту последовательность.

Рассмотрим еще несколько примеров последовательностей.

Пример 3. Последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, числам натурального ряда 1,2,3, ... ставит в соответствие последовательность чисел

$$0; \frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \dots .$$

Если теперь будем неограниченно увеличивать номер n (пишут $n \to \infty$), получим **бесконечную последовательность** чисел.

Пример 4. Формула $b_n = \frac{1}{n+1}$ задает бесконечную последовательность

$$\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{n+1}\ldots.$$

Пример 5. Формула $c_n = (-1)^n$ определяет следующую последовательность $-1; 1; -1; 1;\ldots$.

Членами последовательностей являются числа, их можно изобразить на числовой оси (рис.11 a,b,c).

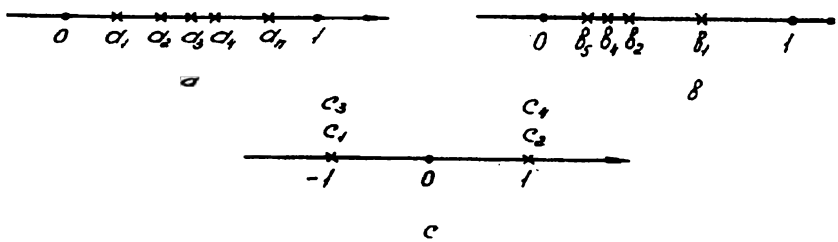


Рис. 11.

На рис. 11,а видно, что члены последовательности $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ (пример. 3) по мере возрастания номера n приближаются к числу 1 так, что абсолютная величина разности $|a_n - 1|$ становится меньше любого произвольно выбранного положительного числа. Число 1 называют **пределом числовой последовательности** $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ при возрастании аргумента (номера) n. Точно так же для последовательности $b_n = \frac{1}{n+1}$ (пример 4) число 0 является пределом, к которому стремятся члены последовательности, когда аргумент n возрастает.

Это кратко записывают так: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ или $a_n \to 1$ $(n\to\infty)$

или $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ или $b_n \to 0$ $(n\to\infty)$

(lim - первые буквы латинского слова limes - предел).

Символ $n\to\infty$ отмечает неограниченный характер изменения (увеличения) аргумента n. В общем случае, если последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом число A, это записывают так:

$\lim a_n = A$.

$n \to \infty$

Последовательность, заданная формулой $c_n = (-1)^n$ (пример 5, рис. 11,с), не имеет предела.

Вернемся теперь к примеру 1. Здесь последовательность задается формулой $a_n = P(1 + n\ i)$ и при увеличении номера n ее члены неограниченно растут. Записывают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Эта последовательность не имеет конечного предела.

§7. Понятие предела функции

Мы познакомились с понятием предела последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = f(n)$ функция натурального аргумента, принимающая дискретные значения. Пусть теперь аргумент меняется непрерывно. Рассмотрим функцию непрерывного аргумента $y = f(x)$. Проиллюстрируем понятие предела функции на примерах.

Пример 1.

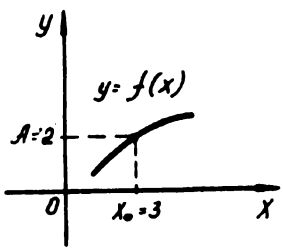


Рис. 12.

Здесь при приближении значения аргумента к числу $x_0=3$ ($x \to 3$), значение функции приближается к числу A=2 как угодно близко (в данном примере даже становится равной 2). Записывается это так: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ или в общем случае: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (рис. 12).

Пример 2.

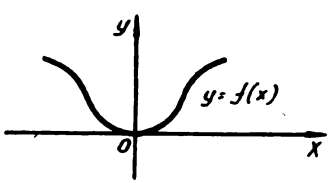


Рис. 13.

В этом примере при приближении значения x к нулю значение функции может стать как угодно малым по абсолютной величине: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (рис. 13).

Пример 3.

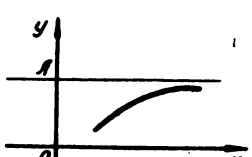


Рис. 14.

Здесь при неограниченном увеличении значения x ($x \to \infty$) значение функции приближается к конечному числу A:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ (Рис. 14)

Прямая y=A является горизонтальной асимптотой к кривой y=f(x).

Пример 4.

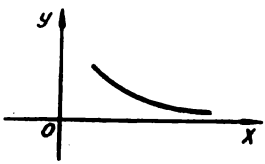


Рис. 15.

Аргумент x неограниченно увеличивается (x⟶∞) и значение функции при этом стремится к нулю: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (рис. 15)

Пример 5.

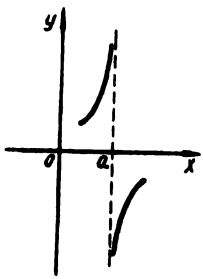


Рис. 16.

Здесь аргумент x стремится к конечному числу a, при этом значение функции по абсолютной величине неограниченно возрастает, причем при стремлении x к a справа f(x)⟶-∞, при стремлении x к a слева f(x)⟶+∞;

Коротко это записывают так: $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ (рис. 16).

Замечание. Конечный предел функции y = f (x) при стремлении x к a справа (x⟶a+0) обозначают так: $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$. Соответственно, конечный предел функции при стремлении x к a слева { x⟶a-0), обозначают: $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$.

Пример 6.

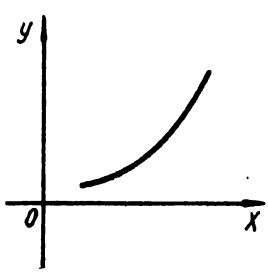


Рис. 17.

Здесь при неограниченном увеличении значения аргумента (x⟶∞) значение функции также растет:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (рис. 17).

§8. Бесконечно малые и бесконечно большие переменные величины

Переменная величина α называется бесконечно малой в данном процессе, если она при этом стремится к нулю: lim α = 0 . Так, например, функция y = f(x)

в примере 2 §7 есть бесконечно малая величина при $x \to 0$, а функция $y = f(x)$ в примере 4 также бесконечно малая величина при $x \to \infty$.

Переменная величина β называется **бесконечно большой** в данном процессе, если ее предел равен бесконечности: $\lim \beta = \infty$.

Функция $y = f(x)$ в примере 5 §7 есть бесконечно большая функция при $x \to a$. Отметим важное свойство бесконечно большой функции: величина, обратная ей, есть бесконечно малая.

Так, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, следовательно, $\frac{1}{x}$ - есть бесконечно малая величина при $x \to \infty$.

Верно и обратное утверждение: величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая, т.е.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

(Итак, та же величина $\frac{1}{x}$ - становится бесконечно большой при $x \to 0$).

Введем еще одно важное понятие. Две бесконечно малые величины α_1 и α_2 называются эквивалентными, если они ведут себя «одинаково» в данном процессе, т.е. $\lim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$.

Записывается это так: $\alpha_1 \sim \alpha_2$. Подробнее о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших величин см. [1], стр.37 - 43.

§9. Основные свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы.

Еще в школьном курсе математики были получены основные свойства пределов:

1. Предел постоянной величины $x = c$ есть само число c.

$\lim c = c$.

2. Пусть x, y,...,z - конечное число переменных величин, каждая из которых имеет конечный предел. Тогда верны следующие утверждения:

а) их алгебраическая сумма (т.е. сумма или разность) также имеет предел u.

$\lim(x \pm y \pm \ldots \pm z) = \lim x \pm \lim y \pm \ldots \pm \lim z$;

6) их произведение также имеет предел

$\lim(x \cdot y \cdot \ldots \cdot z) = \lim x \cdot \lim y \cdot \ldots \cdot \lim z$.

3. Если существуют пределы переменных величин u и φ, причем $\lim \varphi \neq 0$,

то существует предел частного этих переменных

$$\lim\frac{u}{\varphi}=\frac{\lim u}{\lim\varphi}.$$

Доказательства этих свойств см.[1], стр. 43 - 44 (они носят название, соответственно, теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного.). Все свойства пределов справедливы и для случая, когда в качестве переменных величин берутся функции. Свойства пределов облегчают их вычисление.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти предел функции

$$y=\frac{5x^2-4x+2}{3x^2+x-3}$$ при $x\to 1$

Решение. Воспользуемся свойствами пределов и найдем отдельно пределы числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(5x^2-4x+2)=\lim_{x\to 1}5x^2-\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}2=$$

$$=5\cdot\lim_{x\to 1}x^2-4\cdot\lim_{x\to 1}x+2=5\cdot 1-4\cdot 1+2=3$$

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+x-3)=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3=3\cdot 1+1-3=1$$

Применяя свойство 3, получим предел дроби:

$$\lim_{x\to 1}=\frac{5x^2-4x+2}{3x^2+x-3}=\frac{3}{1}=3$$

В этом примере непосредственное применение свойств пределов сразу привело нас к цели - мы получили конечный предел.

Однако на практике такие случаи встречаются крайне редко, а потому, прежде чем применять теоремы о пределах, приходится тождественно преобразовывать данную функцию. Покажем, как это делается на конкретных примерах.

Пример 2. Найти предел при $x\to\infty$ функции $y=\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+4}$. Здесь $x\to\infty$, при этом и числитель и знаменатель также стремятся к бесконечности. Символически этот случай обозначают $[\frac{\infty}{\infty}]$ и называют «неопределенностью типа $[\frac{\infty}{\infty}]$.» Очевидно, что непосредственно применить теорему о пределе частного здесь нельзя. Преобразуем предварительно данную дробь, разделив и числитель и знаменатель

на x^3 (старшая степень знаменателя):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+4}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3})}=\frac{0}{4}=0$$

(Величины $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{4}{x^3}$ бесконечно малые при $x\to\infty$ и их пределы равны нулю). Итак, предел функции у равен нулю, следовательно, при $x\to\infty$ у бесконечно малая функция.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5+3x^2+9}{8x^2+2x-1}$.

Решение. Вновь получили неопределенность типа $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Применим только что использованный прием. Старшая степень числителя равна 5, а старшая степень знаменателя 2. И числитель и знаменатель поделим на x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+3x^2+9}{8x^2+2x-1}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^5}}{\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}.$$

Предел числителя в полученной дроби равен 4, а предел знаменателя равен нулю, знаменатель при $x\to\infty$ - величина бесконечно малая (теорему о пределе частного применить нельзя). Итак, наша дробь как величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой величиной (см. §8) и ее предел равен бесконечности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+3x^2+9}{8x^2+2x-1}=\infty$$

Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{10x^2+2x-1}$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{10x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{10+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Здесь мы использовали тот же прием.

Обобщим последние три примера и запишем правило вычисления предела отношения двух многочленов при «раскрытии» неопределенности типа $[\frac{\infty}{\infty}]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, \text{если } m=n\\ 0, \text{если } m>n\\ \infty, \text{если } m<n\end{cases}$$

Не будем подробно останавливаться на технике вычисления пределов, отметим лишь два предела, которые играют важную роль во многих вопросах математического анализа.

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. (I замечательный предел)

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. (II замечательный предел)

(доказательства см. в [1], стр. 47 - 50).

Первый предел означает, что sinx~x при достаточно малых x, т.е. при x⟶0 (см. §8).

Пример 5. Найти $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{tg5x}$.

Для того, чтобы воспользоваться I замечательным пределом,

заменим $tg5x = \frac{\sin 5x}{\cos 5x}$, умножим числитель и знаменатель на 3x и 5x и используем свойства пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{\cos 5x}{1} \cdot \frac{3x}{5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \lim_{x\to 0} \cos 5x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Вернемся теперь к примеру 2 §6. Пусть годовая процентная ставка i=0,01. Через сто лет по формуле сложных процентов наращенная сумма вклада составит $S = P(1+\frac{1}{100})^{100}$ руб. Коэффициент $(1+\frac{1}{100})^{100}$ является сотым членом ограниченной числовой последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$, предел которой при стремлении n к бесконечности определяет число e=2,7182...

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$ (II замечательный предел).

II замечательный предел раскрывает неопределенность типа $[1^\infty]$.

Итак, при больших n члены последовательности принимают значения, близкие к e, т.е. $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx e$. Следовательно, даже через сто лет первоначальный вклад нашего пенсионера увеличится менее чем в три раза.

§10. Точки разрыва функции. Непрерывность функции.

Наиболее важным классом функций является класс **непрерывных функций**.

Можно считать функцию y=f(x) **непрерывной** в точке $x=x_0$, если в этой точке отсутствует разрыв функции. Что же это такое? Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

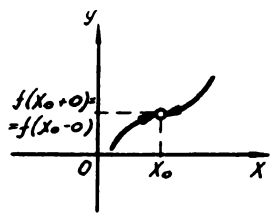


Рис. 18.

Функция y = f(x) имеет конечный предел справа $f(x_0 + 0)$ и конечный предел слева $f(x_0 - 0)$, эти пределы равны, но значение функции в точке $x = x_0$ не существуют (эта точка на кривой y=f(x) «выколота»).

Говорят, что функция в точке $x=x_0$ имеет **устранимый разрыв** (можно эту точку в кривую «вставить») (рис. 18).

Пример 2.

Конечные пределы функции y = f(x) в точке $x=x_0$ и справа, и слева существуют, но они не равны. Функция в этой точке делает «скачок». Точка $x=x_0$ в этом случае называется **точкой неустранимого разрыва I рода** для данной функции (рис. 19).

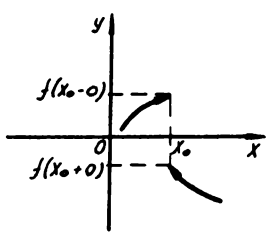


Рис. 19.

Пример 3.

Здесь функция y=f(x) не имеет конечных пределов ни справа, ни слева (а может быть только с одной стороны). Точка $x=x_0$ в этом случае называется **точкой разрыва II рода**. (рис. 20).

Итак, можно сделать вывод: точка $x=x_0$ является точкой непрерывности функции y=f(x), если существуют конечные пределы справа и слева, и эти пределы равны значению функции в этой точке, т.е.

$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x)$.

Если же хотя бы одно равенство нарушено, тогда точка $x=x_0$ является точкой разрыва функции.

Функция y=f(x) называется непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

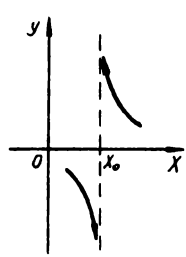


Рис. 20.

ГЛАВА II. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

§1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл

Рассмотрим две задачи, приводящие к понятию производной функции.

Задача 1. Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении. Обозначим S - путь, пройденный точкой, а t-время; Путь, пройденный точкой за время t, зависит от t и изменяется по некоторому закону S=S(t). Отметим некоторый момент времени t_0 , и поставим задачу определить скорость материальной точки V_0 в момент времени t_0. Для этого рассмотрим другой момент времени по прошествии отрезка Δt, т.е. момент $t_0+\Delta t$. К моменту t_0, путь, пройденный точкой, составит $S(t_0)$, в момент $t_0+\Delta t$ будем иметь путь $S(t_0+\Delta t)$. За промежуток времени Δt точка прошла путь $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. Средняя скорость движения за время Δt составит отношение $V_{ср}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Эта средняя скорость отличается от мгновенной скорости в момент t_0, и тем ближе величина Vср к скорости V_0, чем меньше промежуток Δt. Устремим Δt к нулю (пишут $\Delta t \to 0$), тогда предел, к которому стремится средняя скорость, и является скоростью нашей точки V_0 в момент t_0.

$$V_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S'}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t} \qquad (1)$$

В формуле (1) рассматривается предел отношения приращения пути ΔS к приращению времени Δt.

Задача 2. Рассмотрим график непрерывной функции y=f(x). Возьмем на этом графике точку M_0 (x_0, y_0) и поставим задачу написать уравнение касательной прямой к графику y=f(x), проведенной в точке M_0 (рис. 21).

Точка M_0 имеет координаты x_0, $y_0=f(x_0)$; дадим переменной x приращение Δx и переместимся по графику из точки M_0 в точку M. (в нашем случае $\Delta x>0$ и

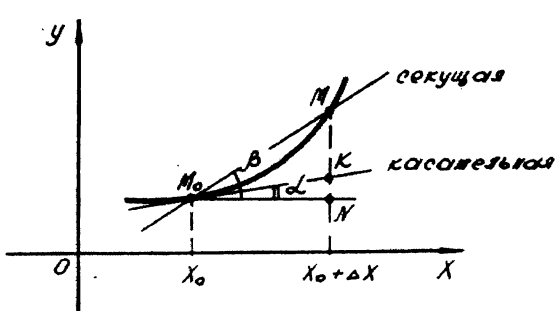


Рис. 21.

мы переместились вправо от точки M_0). Координаты М можно вычислить. Абсцисса М равна $x_0+\Delta x$, а ордината $y=f(x_0+\Delta x)$. На сколько изменилось значение функции $y=f(x)$ при перемещении из точки M_0 в точку М? Это изменение функции называется приращением функции, обозначается Δy и вычисляется так: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

В случае нашей функции (**возрастающая**) $\Delta y>0$. Прямая M_0M называется секущей и ее наклон к оси ОХ определяется тангенсом угла β. Угловой коэффициент секущей $K_{сек} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если теперь неограниченно уменьшать приращение Δx, $\Delta x \to 0$, то приращение функции $\Delta y \to 0$ (наша функция непрерывна). При этом секущая M_0M неограниченно приближается к положению M_0K. Это предельное положение секущей и есть прямая, которая является касательной к графику $y=f(x)$ в точке M_0. Угол β наклона секущей к положительному направлению оси ОХ превратится в угол наклона касательной α. Тогда угловой коэффициент касательной прямой К получим так:

$K = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$, $K = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. угловой коэффициент касательной есть предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx к нулю при произвольном стремлении Δx к нулю, если такой предел существует. Обозначается производная функции $f(x)$ в точке x_0 символом $f'(x_0)$.

Итак, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Из рассмотренных ранее задач получаем, что скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t_0 есть производная от пути по времени

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

В этом состоит **механический смысл производной**. Вторая задача приводит нас к **геометрическому смыслу производной**. Мы получили, что угловой коэффициент касательной к кривой проведенной в точке M_0 (x_0,y_0), есть $f'(x_0)$. Поэтому уравнение касательной к графику в точке M_0 имеет вид:

$y - y_0 = K(x-x_0)$, $y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$.

Для производной в точке x_0 можно использовать и другие обозначения,

например: $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), y'\big|_{x=x_0}$

Мы дали определение производной функции y=f(x) в точке x_0. Такую производную можно вычислять в различных значениях x, величина ее зависит от этого значения. Поэтому можно говорить о производной функции, определенной на некотором множестве значений x. Производную функции обозначают f'(x).

Посмотрим на графики функции y=f(x), y=q(x) и y =φ(x), изображенные на рис. 22 - 24.

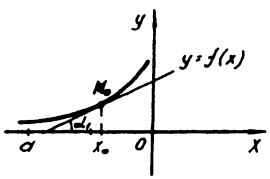


Рис. 22.

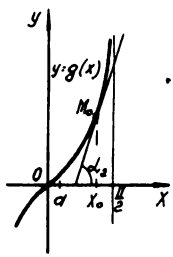


Рис. 23.

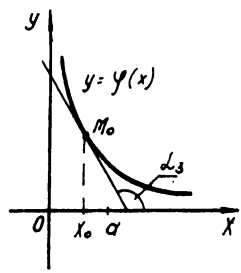


Рис. 24.

Функции f(x) и q(x) возрастают, но график, изображенный на рис. 22, - пологий на участке [a,0]; т.е. функция y=f(x) меняется (растет) медленно, график же функции q(x) круто поднимается вверх на участке $[a, \frac{\pi}{2}]$, т.е. q(x) меняется (тоже растет) быстро, с большей скоростью. Проведем касательные к нашим графикам в точке M_0. Сравним углы α_1 и α_2, которые образуют касательные к графикам с положительным направлением оси OX. Так как углы α_1 и α_2 острые, то $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ положительны и по смыслу производной это означает, что обе функции возрастают в интервале от (a; x_0). Поскольку $f'(x_0)<q'(x_0)$, график второй функции «круче», чем график первой.

Эти рисунки отражают общее явление: если функция возрастает на интервале и имеет производную в каждой точке этого интервала, то производная неотрицательна; если производная положительна во всех точках интервала, то функция строго возрастает на этом интервале.

Рассмотрим теперь рис.24. На нем изображен график убывающей на $[x_0,a]$ функции y=φ(x). Угол α_3 касательной с осью OX тупой и $tg\alpha_3=\varphi'(x_0)<0$.

Этот рисунок отражает следующее общее явление: если функция убывает на интервале, то во всех точках этого интервала ее производная неположительна; если производная отрицательна, то функция строго убывает.

В сформулированных утверждениях следует строго различать необходимые и достаточные условия. Поясним это примерами.

Функция $y=x^3$ строго возрастает на всей **вещественной** оси (рис.25). Для ее производной имеем $y' = 3x^2$. В частности, y'=0 при x=0. Это означает, что положительность производной является достаточным, но не является необходимым условием (строгого) возрастания. Кроме того, следует не упускать из вида, что на участках возрастания (убывания), строгого или нет, могут встречаться точки, в которых функция вообще не имеет производной. Простейший пример дает функция $y=2x+|x|$, график которой имеет вид (рис. 26):

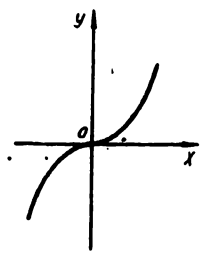


Рис. 25.

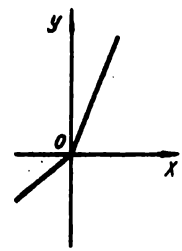


Рис. 26.

Вернемся снова к рис.21. Мы показали, что при движении из точки x_0 в точку $x_0+\Delta x$ по графику функции y=f(x) ордината точки получает приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, На рисунке это приращение Δy равно отрезку NM. Если же двигаться из точки x_0 в точку $x_0+\Delta x$ по касательной, проведенной в точке M_0 то ордината получит приращение, равное отрезку KN. Вычислим величину этого приращения. Из треугольника M_0KN следует катет: $KN=M_0N\cdot tg\alpha$.. Так как $tg\alpha=f'(x_0)$, а $M_0N=\Delta x$, то $KN=f'(x_0)\,\Delta x$.

Произведение производной f'(x) на приращение Δx называется **дифференциалом** функции y=f(x) в точке x_0. Обозначают дифференциал dy(x) или df(x). Поэтому можно написать $dy=df(x)=f'(x)\,\Delta x$. Для приращения независимой переменной имеем $\Delta x=dx$, и поэтому дифференциал записывается в виде df=f'(x)dx.

Заметим, что приращение функции Δy при малом приращении $\Delta x=dx$ по величине «очень мало» отличается от приращения по касательной, т.е. от дифференциала dy. Так как касательная в т. M, «почти совпадает» с кривой в малой окрестности точки x_0 то разность (Δy - dy) стремится к нулю «быстрее», чем Δx, при $x\longrightarrow 0$. Это обстоятельство используется в приближенных вычислениях (см. пример 11 приложения 1).

§2. Основные правила дифференцирования.

Если функции u=u(x) и v=v(x) дифференцируемы в точке x, тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1. (cu)'=c u', где c - постоянная;
2. (u±v)'=u'±v';
3. (u·v)'=u'v+ v'u;
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Пусть функция y=f(u), где u=u(x). Тогда y есть сложная функция от x: y = f(u (x)), а u - промежуточный аргумент. Чтобы найти производную этой сложной функции, применяют следующее правило: $y'_x = \frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Например, если $y=\cos^3 x$, то (см. таблицу основных формул дифференцирования), обозначив u = cos x, получим $y=u^3$.

Тогда $y'_x=3u^2 u'_x$; $y'_x= 3\cos^2 x (- \sin x)$.

Таблица основных формул дифференцирования.

1. $y=c$, $y'=0$, c - постоянная.
2. $y=x^\alpha$, $y'=\alpha x^{\alpha-1}$,
   $y=x^n$, $y'=nx^{n-1}$, n - целое.
3. $y=a^x$, $y'=a^x \ln a$,
   $y=e^x$, $y'=e^x$.
4. $y=\log_a x$, $y' = \frac{1}{x \ln a'}$,

   $y=\ln x$, $y' = \frac{1}{x}$.
5. y=sinx, y'=cosx.
6. y=cosx, y'=-sinx.
7. y=tgx, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
8. y=ctgx, $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Пример 1.

$$y = e^{-x} \cdot \sqrt{x}\ ;\ y' = (e^{-x})'\sqrt{x} + e^{-x}(\sqrt{x})' = (e^{-x})'x^{\frac{1}{2}} + e^{-x}(x^{\frac{1}{2}})';$$

$$y' = -e^{-x} \cdot \sqrt{x} + (e^{-x})\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = e^{-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}).$$

Пример 2.

$$y=\frac{\ln x}{x^2};\ y'=\frac{(\ln x)'x^2-\ln x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=$$

$$=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4};\ y'=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

§3. Производные высших порядков.

Пусть функция y=f(x) дифференцируема на интервале (a,b). Тогда ее производная тоже имеет производную. Она называется второй производной, или производной второго порядка и обозначается символами y'', f''(x), $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $\ddot{y}$.

В отличие от второй производной y' = f'(x) называется **первой производной**, или **производной первого порядка**.

Вообще, **производной n-го порядка** функции f(x) называется первая производная от производной (n-1)-го порядка:

$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$.

Пример.

Найти значение y третьей производной в точке x=0, $y = e^{5x+3}$.

Сначала найдем функцию $y'''=(f(x))'''$, а затем вычислим ее значение в точке x=0.

$y'=(e^{5x+3})'=5e^{5x+3}$, $y''=(e^{5x+3})''=(5e^{5x+3})'=25e^{5x+3}$,

$y'''=(25e^{5x+3})'=125e^{5x+3}$, $y'''(0)=125e^{5\cdot0+3}=125e^3$.

§4. Экстремумы функций.

Если есть функция y=f(x), которая имеет конечную производную в каждой точке отрезка [a,b] (говорят, функция f(x) дифференцируема на отрезке [a,b]), то ее поведение можно исследовать с помощью производной y= f'(x). Мы уже отмечали в §1, что интервалы возрастания и убывания f(x) определяются знаком

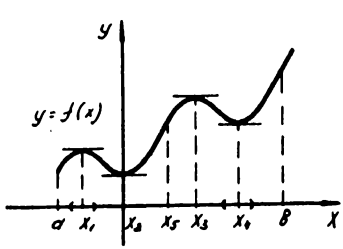


Рис. 27.

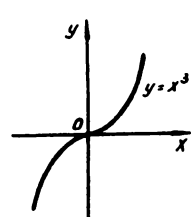


Рис. 28.

f'(x).

Рассмотрим теперь точки, отделяющие интервал возрастания функции от интервала убывания.

Как видно из рис. 27, такими точками являются точки x_1, x_2, x_3, x_4. Точка x_1, например, обладает следующим свойством: значение функции в точке x_1 больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_3 функция тоже имеет максимум, а сами точки $x=x_1$ и $x=x_3$ называют точками максимума. И хотя значение функции в точке максимума x_1 меньше, чем, например, в точке x_5, важно отметить, что «по – соседству» с x_1 имеем $f(x)<f(x_1)$. Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет максимум (max) в точке $x=c$, если существует такая окрестность точки $x=c$, что для всех точек $x\neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)<f(c)$.

Функция $y=f(x)$ имеет минимум (min) в точке $x=c$, если существует такая окрестность точки $x=c$, что для всех точек $x\neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)>f(c)$.

Таким свойством, очевидно, обладают точки $x=x_2$ и $x=x_4$, эти точки называют точками минимума. Точки **максимума** и **минимума** объединяют под общим названием точки **экстремума**.

Точки экстремума лежат внутри области определения функции, их еще называют **локальный максимум** и **локальный минимум** (от латинского слова lokal - местный). Точки же $x=b$ и $x=x_2$ на рис. 30 являются **глобальным максимумом** и **глобальным минимумом**, или, говорят, **наибольшим и наименьшим значением f(x) на замкнутом интервале [a,b].** В нашем случае глобальный максимум совпадает с концом интервала $x=b$, а глобальный минимум совпадает с локальным в точке $x=x_2$. Функция, непрерывная на замкнутом интервале, достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Что можно сказать о производной в точках экстремума ? (Мы рассматриваем случай, когда производная существует во всех точках [a,b].)

Вспомним, что производная $f'(x_0)$ связана с касательной, проведенной в точке x_0. В точках экстремума x_1, x_2, x_3, x_4 (т.е. на «вершинах» и на «дне оврагов») **касательные горизонтальны**, т.е.

$f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=f'(x_4)=0$.

Сформулируем такое общее утверждение (необходимый признак существования экстремума):

Если f(x) имеет в точке x=c экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(c)=0$.

Не следует думать, что верно и обратное утверждение. Из того, что $f'(c)=0$ еще не следует, что точка x=c является точкой минимума или максимума.

На рис. 28 изображен график функции $y=x^3$. В точке x=0 касательная горизонтальна и производная $y'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0$ равна нулю, но в этой точке у функции нет ни минимума, ни максимума. Из сказанного следует, что обращение в нуль производной в точке, еще не достаточно, чтобы утверждать, что в этой точке экстремум. Однако искать точки экстремума следует среди тех, в которых производная равна нулю.

Такие точки называют **стационарными**.

Чем же отличается, например, точка x_3 на рис. 27 от точки x=0 на рис. 28?

И в той, и в другой точке касательные параллельны оси OX, т.е. f'=0, обе точки стационарные.

В точке $x=x_3$ функция f(x) меняет характер монотонности (с возрастания на убывание), т.е. производная слева от x_3 положительна, а справа - отрицательна.

В точке x=0 (рис. 28) функция $y=x^3$ характер монотонности не меняет, слева и справа от стационарной точки функция возрастает и ее производная $y'=3x^2$ сохраняет положительный знак.

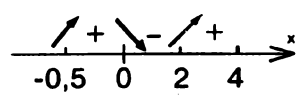
Теорема (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция y=f(x) имеет производную f'(x) во всех точках некоторого интервала, содержащего стационарную точку x=c, и если производная f'(x) при переходе аргумента слева направо через стационарную точку x=c меняет знак с плюса на минус, то стационарная точка x=c есть точка максимума, а при перемене знака с минуса на плюс - точка минимума.

Пример. Определить экстремум функции $y=x^3-3x^2+2$ и найти ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке [-0,5; 4].

Областью существования функции является вся числовая ось $(-\infty,+\infty)$. Находим производную $y'(x)=3x^2-6x$. Приравниваем производную нулю, находим стационарные точки:

$3x^2-6x=3x(x-2)=0$. Решаем это уравнение и получаем $x_1=0$, $x_2=2$. Нанесем наши точки на числовую ось и посмотрим, как ведет себя производная $y'=3x(x-2)$ на отрезке [-0,5;4].

Рассмотрим интервалы (-0,5;0), (0,2), (2,4).



На интервале (-0,5;0) производная f'(x)>0, на интервале (0,2) производная f'(x)<0. (Убедиться в этом можно, подставляя в производную какую-нибудь точку из рассматриваемых интервалов). Теперь рассмотрим интервал (2,4) и убедимся, что f'(x)>0. Таким образом, переходя через точку x=0, производная меняет знак с плюса на минус, т.е. стационарная точка x=0 является точкой максимума, а в точке x=2 происходит смена знака производной с минуса на плюс и x=2 - точка минимума. Значения функции в точках x_{min} и x_{max} вычислим, подставив x=2 и x=0 в уравнение $y=x^3-3x^2+2$.

Получим $x_{max}=0$, $y_{max}=y(0)=2$; $x_{min}=2$, $y_{min}=y(2)=-2$.

Итак, мы определили локальные экстремумы.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции – глобальные экстремумы - применяется следующее правило:

1. Находим все стационарные точки и точки, в которых производная не существует, и вычисляем в них значения функции.

2. Вычисляем значения функции на концах отрезка, в точках x=a, x=b.

3. Сравнивая между собой вычисленные значения функции, выбираем наибольшее и наименьшее.

Так как значения в стационарных точках вычислены, подсчитаем значения

функции на концах отрезка [-0,5;4], в точках x=-0,5; x=4.

$y(-0,5)=(-0,5)^3-3(-0,5)^2+2=+9/8$, $y(4)=4^3-3\cdot4^2+2=18$

Сравниваем значения функции y(-0,5), y(0), y(2), y(4), получаем, что наибольшее значение достигается на правом конце y(4)=18, а наименьшее в точке локального минимума y(2)=-2.

§5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Еще одной важной характеристикой функции является характер ее выпуклости.

График дифференцируемой функции называется **выпуклым** в интервале (a,b), если он расположен выше любой своей касательной в этом интервале (рис. 29).

График дифференцируемой функции называют вогнутым в интервале (a,b), если он расположен ниже любой своей касательной в этом интервале (рис. 30).

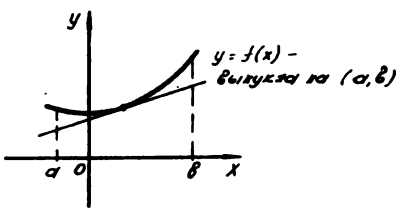


Рис. 29.

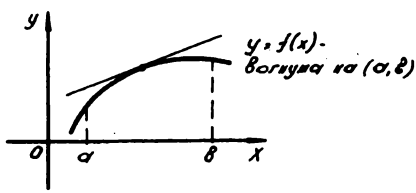


Рис. 30.

Так, парабола $y=x^2$ - функция выпуклая на всей числовой оси (рис.31), а полуокружность $y=\sqrt{1-x^2}$ (рис.32) имеет вогнутый график на отрезке (-1,1).

Точка $M_0(x_0,f(x_0))$, лежащая на графике и отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется **точкой перегиба функции** y=f(x) (рис.33).

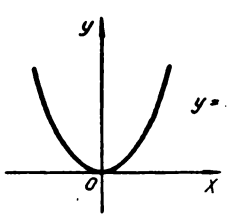


Рис. 31.

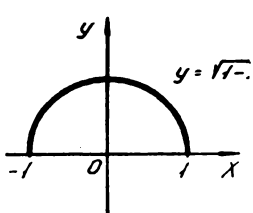


Рис. 32.

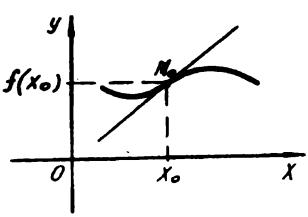


Рис. 33.

За выпуклость (вогнутость) функции «отвечает» вторая производная функции y=f(x).

Справедливо следующее утверждение: если функция y=f(x) имеет вторую производную f''(x) во всех точках интервала (a,b) и если во всех точках этого

интервала f''(x)<0, то график функции в интервале (a,b) - вогнутый, если же f''(x)>0, то график функции выпуклый в этом интервале.

(Доказательство этого утверждения см.[1], том 1, стр. 172-174.)

Точки перегиба следует искать среди тех точек, в которых вторая производная y''=f''(x)=0.

Если слева от такой точки и справа от нее f''(x) имеет разные знаки, то найденная точка будет точкой перегиба.

Замечание. В литературе часто функцию, изображенную на рис.30, называют выпуклой, а на рис.29 - вогнутой. Для нас вопрос о том, как назвать графики функций на рис.30 и рис.29, не является принципиальным, важно, что у функции (рис.29) f''(x)>0 на интервале (a,b), а на рис.30 f''(x)<0 на интервале (a,b).

§6. Асимптоты графика функции.

Рассмотрим график функции на рис.34. Точки $x=x_2$, $x=x_4$ – точки экстремумов функции, точка $x=x_1$ - это точка перегиба. Точка $x=x_3$ является особенной точкой для функции, в ней f(x) терпит разрыв, а прямая $x=x_3$ является **вертикальной асимптотой** графика функции. Прямая y=kx+b тоже будет асимптотой графика, только наклонной; прямая y=0 - горизонтальная асимптота графика.

Если точка M(x,y) лежит на графике и неограниченно удаляется от начала координат, то она приближается к одной из этих прямых; расстояние от точки M(x,y) до асимптот стремится к нулю.

Для отыскания вертикальных асимптот следует найти те значения x, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв).

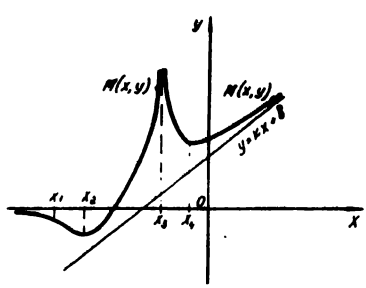


Рис. 34.

Для определения наклонной асимптоты y=kx+b числа k (угловой коэффициент прямой) и b находят из формул:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Отметим, что следует отдельно рассмотреть случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Частным случаем наклонной асимптоты при k=0 будет горизонтальная асимптота.

§7. Общее исследование функции.

Для общего исследования функции и построения графика полезно

придерживаться следующего плана.

1. Область определения функции, решение вопроса о четности, нечетности, периодичности функции.

2. Точки разрыва функции и интервалы непрерывности.

3. Построение асимптот графика (вертикальных и наклонных).

4. Экстремумы функции и интервалы монотонности.

5. Интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

6. Нахождение точек пересечения графика с осями координат (если это возможно).

Пример 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{(3-x)^2}{1-x}$ и построить ее график.

1). Функция определена на всей числовой оси за исключением точки x=1, где знаменатель дроби обращается в нуль. Так как область определения не

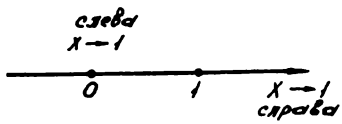


Рис. 35.

симметрична относительно начала координат, то не имеет смысла говорить о четности (нечетности) функции.

2). Точка x=1 является точкой разрыва функции.

Найдем пределы y=f(x) при x⟶1 (слева и справа) (рис. 35).

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(3-x)^2}{1-x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}\frac{(3-x)^2}{1-x}=+\infty.$$

Если функция в точке x=1 имеет бесконечный разрыв, то прямая x=1 является для графика вертикальной асимптотой.

3). Будем искать наклонную асимптоту в виде y=kx+b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3-x)^2}{(1-x)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9-6x+x^2}{x-x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{6}{x}+1}{\dfrac{1}{x}-1}=-1$$

Теперь найдем $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3-x)^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{9-6x+x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9-5x}{1-x};$$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}-5}{\frac{1}{x}-1}=5$$

Наклонная асимптота графика y=5-x.

4) Найдем первую производную $y'=\left(\frac{(3-x)^2}{1-x}\right)'$

$$y'=\frac{[(3-x)^2]'(1-x)-(1-x)'(3-x)^2}{(1-x)^2}=\frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)^2}.$$

Найдем сначала стационарные точки, т.е. приравняем y'=0. Получим

$$\frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)^2}=0,\ x_1=3,\ x_2=-1.$$

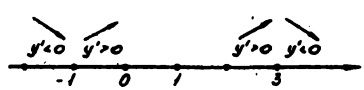


Рис. 36.

Посмотрим, меняет ли производная знак при переходе через эти точки. Результаты схематически изображены на рис. 36.

Вывод: x=-1 - точка минимума, y(-1)=8; x=3 -. точка максимума, y(3)=0.

5) Исследование, включающее вторую производную, проводить не обязательно. Но мы все же вычислим y''

$$y''=\left(\frac{3+2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{8}{(1-x)^3}.$$

Вторая производная в нуль не обращается, т.к. точек перегиба график не имеет. На интервале (-∞,1) вторая производная положительна, и график выпуклый, в интервале (1,+∞) вторая производная меняет знак на минус, и график - вогнутый.

6) Здесь легко найти точки, где функция пересекает координатные оси: y=0

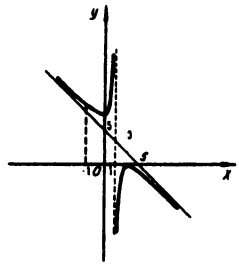


Рис. 37.

при x=3, а при x=0, y=9.

График изображен на рис. 37.

Пример 2. Исследовать функцию $y = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ и построить ее график.

1,2). Область определения функции - вся числовая ось (-∞,+∞). Функция всюду непрерывна, вертикальных асимптот нет.

3). Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{xe^{\frac{(x-1)^2}{2}}} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-1)^2}{2}}} = 0.$$

Асимптотой является горизонтальная прямая y=0.

4). Найдем экстремум функции и интервалы монотонности.

$$y' = (e^{-\frac{(x-1)^2}{2}})' = (1-x)\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2}};\ y'=0,\ x=1.$$

Стационарная точка x=1 будет точкой максимума функции, так как при переходе через эту точку (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус; $y_{max}=y(1)=e^0=1$.

5). Вычислим y'' и найдем точки перегиба:

$$y'' = [(1-x)\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}]' = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} x(x-2)$$

Вторая производная обращается в нуль при x=0 и при x=2. В обеих этих точках происходит смена знака y'', т.е. обе точки будут точками перегиба:

$$y(0)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}62\,,\quad y(2)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}62\,.$$

График функции изображен на рис.38.

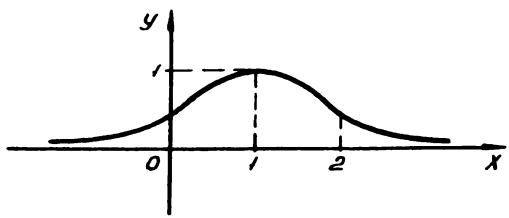


Рис. 38.

ГЛАВА III. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В школьном курсе математики изучаются прямые и обратные операции: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня. Обратные операции обычно бывают более сложными, чем прямые.

§1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.

В дифференциальном исчислении мы решали следующую задачу: по данной функции найти ее производную. Теперь мы займемся обратной операцией: дана функция f(x), которая является производной функции F(x), и по функции f(x) будем искать функцию F(x).

Первообразной функцией для данной функции f(x) называется функция F(x) производная которой равна f(x), или дифференциал которой равен выражению f(x)dx, т.е. F'(x)=f(x), или dF(x)=f(x)dx

Так, например, для функции $f(x)=3x^2$ первообразной будет $F(x)=x^3$, т.к. $(x^3)'=3x^2$.

Не всякая функция f(x) имеет первообразную, но если, например, функция f(x) - непрерывна на интервале, то она имеет на нем первообразную. Задача отыскания по данной функции ее первообразной решается неоднозначно.

Например, функция $F(x)=x^3$ есть первообразная для $3x^2=f(x)$, т.к. F'(x)=f(x).

Но функция $z=x^3+5$ также будет первообразной для $3x^2$, т.к. $z'=(x^3+5)'=3x^2$. Вообще любая функция x^3+c, где c - произвольная постоянная, имеет производную $3x^2$ и потому будет первообразной для $3x^2$.

Справедливо следующее утверждение: если функции F(x) есть первообразная функции f(x) на интервале (a,b), то всякая другая первообразная функции f(x) отличается от F(x) на постоянное слагаемое, т.е. представляется в виде F(x)+C, где C - постоянная.

Таким образом, выражение F(x)+C представляет собой общий вид первообразных для f(x).

Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом функции f(x) и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (2)$$

Операцию нахождения всех первообразных от данной функции f(x), или, что то же самое, отыскание неопределенного интеграла называют интегрированием функции f(x). Так как

(F(x)+c)'=f(x), то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. (3)

Формулы (3) показывают, что если функцию f(x) проинтегрировать, а затем продифференцировать, то получим снова функцию f(x).

Поэтому дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями.

Перечислим основные свойства неопределенного интеграла.

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов, т.е.

$$\int [f(x)+q(x)-h(x)]dx = \int f(x)dx + \int q(x)dx - \int h(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int cf(x) = c\int f(x)dx$$

Чтобы проверить эти свойства, достаточно продифференцировать обе части равенства.

§2. Основные методы интегрирования.

Вычисление неопределенного интеграла является задачей значительно более трудной, чем отыскание производной. Например, нет никаких правил для нахождения неопределенных интегралов от произведения или частного двух функций. Кроме того, интегралы от некоторых элементарных функций, например, e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, не являются элементарными функциями. Тогда говорят, что интеграл от них не берется в элементарных функциях.

Мы выпишем здесь таблицу основных интегралов и нашим основным методом вычисления интегралов будет сведение неопределенного интеграла к табличному.

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$, с - постоянная.

2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

Во многих случаях удается введением новой переменной t вместо переменной интегрирования x свести интеграл $\int f(x)dx$ к более простому, например, к табличному.

Пусть x=φ(t), где φ(t) - непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную φ'(t).

Тогда имеет место формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислить $\int \sqrt{1-3x}dx$.

Введем новую переменную t=1-3x, dt=-3dx, $dx = -\frac{dt}{3}$

Подставим в интеграл и получим $\int \sqrt{t}(-\frac{dt}{3}) = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt$.

Для переменной t получили табличный интеграл

$$-\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{3}t^{\frac{1}{2}+1}\frac{1}{(\frac{1}{2}+1)} = -\frac{2t\sqrt{t}}{9} + C$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \sqrt{1-3x}dx = -\frac{2}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x} + C$$

Пример 2. Вычислить $\int \sin(4x+2)dx$.

Сделаем опять замену t=4x+2. Тогда dt=4dx, $dx = \frac{dt}{4}$,

$$\int \sin(4x+2)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt$$

Но интеграл $\int \sin t dt$ есть в нашей таблице, поэтому

$$\int \sin(4x+2)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt = \frac{1}{4}(-\cos t) = \frac{-1}{4}\cos(4x+2)+C$$ Пример

3. Вычислить $\int xe^{x^2}dx$.

Введем новую переменную t:

$$t = x^2,\ dt = 2xdx,\ x\cdot dx = \frac{dt}{2},\ \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Правило интегрирования по частям. Имеется интеграл $\int f(x)dx$, где подынтегральное выражение представляет собой произведение некоторой функции u(x) на дифференциал другой функции dv(x), т.е. f(x)dx=u(x)dv(x). Тогда

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x) \quad (5)$$

Формулу (5) называют формулой интегрирования по частям. Рассмотрим, как она применяется, на примерах.

Пример 1. Найти $\int x\sin xdx$. .

Пусть u=x, dv=sin2xdx. Чтобы применить формулу (5), нужно найти v(x) и du.

du=dx, $v = \int dv = \int \sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}$

Подставим в формулу (5) и получим:

$$\int x\sin 2xdx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$

Пусть lnx=u, $dv = \frac{dx}{x^2}$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

Тогда исходный интеграл по формуле (5) находим так:

$$\int \frac{\ln xdx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Рассмотрим еще один класс функций, для которых интегралы вычисляются и являются элементарными функциями. Речь идет о функциях, которые равны частному от деления двух многочленов. Напомним сначала, какую функцию называли многочленом в школьном курсе математики.

Например, $P_3(x)=2x^3-2x^2+1$ – многочлен третьей степени, парабола $y(x)=x^2$ - многочлен второй степени, а прямая линия $y=kx+b$ является многочленом первой степени.

Таким образом, многочленом называется функция вида

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \qquad (6)$$

Старшая степень переменной x называется степенью многочлена, в формуле (6) степень многочлена равна n, если $a_n\neq 0$; числа a_0, a_1, $a_2,\dots,a_n$ называют коэффициентами многочлена. Если $P_n(x)$ - многочлен степени n, а $Q_m(x)$ - многочлен степени m, то функция $P(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется рациональной функцией, или просто рациональной дробью. Рассмотрим несколько примеров интегрирования «правильных» рациональных дробей, т.е. таких, у которых степень числителя n меньше степени знаменателя m.

Пример 1. Найти $\int\dfrac{1+2x}{(1+x)^2}dx$.

Разобьем сначала интеграл на сумму двух интегралов, из которых первый найдем сразу, а второй тоже вычислим после простых преобразований:

$$\int\frac{1+2x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{dx}{(1+x)^2}+2\int\frac{xdx}{(1+x)^2}=\int(1+x)^{-2}dx+2\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx;$$

$$\int\frac{(1+2x)}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{x+1}+2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Пример 2. Найти $\int\dfrac{dx}{x(x-8)}$.

Рассмотрим такой прием: представим подынтегральную функцию как сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x(x-8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-8}\text{, A, B – постоянные.} \qquad (7)$$

Подберем числа A,B так, чтобы равенство (7) выполнялось при всяких значениях переменной x

$$\frac{1}{x(x-8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-8}=\frac{A(x-8)+Bx}{x(x-8)}=\frac{x(A+B)-8A}{x(x-8)} \qquad (8)$$

Сравним «самую левую» и «самую правую» дроби в равенстве (8). Так как знаменатели у них равны, то должны быть равны и числители 1=(A+B)x-8A.

Два многочлена считаются равными, если совпадают коэффициенты при одинаковых степенях x:

A+B=0, -8A=1, $A=-\frac{1}{8}, B=\frac{1}{8}$

Теперь наш интеграл сведется к сумме двух интегралов

$$\int\frac{dx}{x(x-8)}=-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-8}=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|x-8|=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-8}{x}\right|+C$$

Пример 3. Найти $\int\frac{x^2+2x+4}{x+2}dx$

В этом примере функция $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$ не является правильной дробью.

Поступим следующим образом:

$$\int\frac{x^2+2x+4}{x+2}dx=\int\frac{x(x+2)}{x+2}dx+4\int\frac{dx}{x+2}=\int xdx+4\ln|x+2|=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4\ln|x+2|+C.$$

ГЛАВА 4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

§1. Задача о площади. Понятие определенного интеграла.

В школьном курсе рассматривались вопросы нахождения площади плоских фигур, ограниченных прямолинейными отрезками, а также площади круга и его частей. Рассмотрим задачу о вычислении площади фигуры, изображенной на рис.39 (заштрихованной).

Такая фигура называется криволинейной трапецией.

Она ограничена осью OX, двумя вертикальными прямыми x=a и x=b, а сверху - графиком функции y=f(x), причем f(x) предполагается непрерывной функцией и положительной на интервале (a,b).

Разобьем отрезок [a,b) точками $a=x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n=b$ на n равных частей. Получим n «малых» отрезков

$[x_0, x_1], [x_1, x_2],\ldots,[x_{k-1}, x_k],[x_{n-1}, x_n]$.

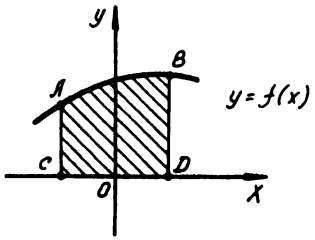


Рис. 39.

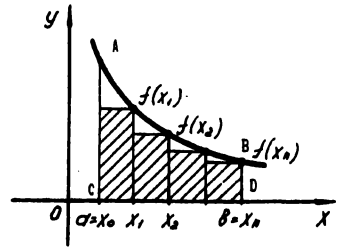


Рис. 40.

длина каждого отрезка (x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, ...,n обозначается Δx_k (в нашем случае все отрезки равны)

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}.$$

Проводя через точки деления прямые, параллельные оси OY, мы разобьем криволинейную трапецию CABD на n малых криволинейных трапеций (рис.40).

Если обозначить через S площадь всей криволинейной трапеции, а через ΔS_k - площадь малой криволинейной трапеции с основанием $[x_{k-1}, x_k]$, (k= 1, 2,..., n), то очевидно,

$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n$.

Коротко эту последнюю сумму записывают так: $S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k$, где греческая буква Σ (сигма) - это знак суммы, а символ $\sum_{k=1}^{n}$ означает, что суммируются n слагаемых при изменении индекса k от 1 до n.

Заменим теперь площадь малой криволинейной фигуры площадью прямоугольника (рис.40), основание которого совпадает с основанием малой криволинейной трапеции, а высота равна значению функции f(x} в конце интервала разбиения:

$\Delta S_k = f(x_k)\,\Delta x_k$, k=1,2,...n.

Тогда искомая площадь приближенно равна площади ступенчатой фигуры и

$$S = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \qquad (9)$$

Ясно, что чем меньше длина промежутков (x_{k-1}, x_k), тем точнее ступенчатая фигура приближает нашу криволинейную трапецию.

Будем теперь каждый раз увеличивать вдвое число n точек разбиения, т.е.

«мельчить» в два раза наше разбиение, получим последовательность сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k .$$

Вполне естественно за точное значение площади S криволинейной трапеции принять предел последовательности площадей ступенчатых фигур, когда $n\to\infty$ (при этом все длины Δx_k стремятся к нулю). Сумма вида (9) $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой, а предел, если он существует, к которому стремится последовательность интегральных сумм при $n\to\infty$, называется определенным интегралом функции f(x) на отрезке [a,b]. Определенный интеграл функции f(x)от a до b обозначается символом $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$.

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, f(x) - подынтегральной функцией, а отрезок [a,b] - областью интегрирования.

Если функция f(x) - непрерывна на отрезке [a,b], то определенный интеграл существует (достаточное условие).

Замечание. Можно рассмотреть интегральные суммы более общего вида:

1. Точки деления $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ можно выбирать произвольно, не обязательно на равном расстоянии друг от друга.

2. Внутри интервала (x_{k-1},x_k) выбирается произвольная точка $\xi_k (x_{k-1}\le\xi_k\le x_k)$, (k=1,2,...,n), площадь «малой» криволинейной трапеции ΔSk заменяется площадью прямоугольника с теми же основанием и высотой $f(\xi_k)$, как показано на рис.41.

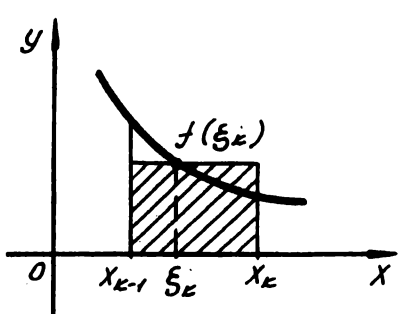


Рис. 41.

Интегральная сумма получится другой

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (10)$$

Можно доказать, что при достаточно «мелком» разбиении (все Δx_k (k=1,2,...,n), достаточно малы) интегральная сумма (10) близка по своему значению к интегралу.

Возвращаясь к задаче о площади, с которой мы начали, мы видим, что и площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), где f(x)≥0 на всем отрезке [a,b], численно равна определенному интегралу

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Этот факт выражает **геометрический смысл определенного интеграла**

§2. Вычисление определенного интеграла. Основные свойства.

Впервые со словом «интеграл» и обозначением $\int f(x)dx$ мы встретились, когда ввели понятие первообразной F(x) для функции f(x). Решая задачу о площади криволинейной трапеции, мы снова получили $\int_a^b f(x)dx$, который назвали определенным (символ интеграла $\int$ происходит от вытянутой латинской буквы S.). Безусловно, это не случайно. Оказывается, с помощью неопределенного интеграла (первообразной) получен способ вычисления определенного интеграла. Для вычисления определенного интеграла применяют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (11)$$

(функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) - одна из ее первообразных).

Разность F(b)-F(a) символически обозначают $F(x)\Big|_a^b$.

Поясним эту формулу на примере. Необходимо вычислить

$$\int_0^1 2^x dx.$$

Сначала найдем любую первообразную для 2^x:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$$

Затем найдем значение определенного интеграла. Для этого подставим в

первообразную значение верхнего предела и вычтем результат подстановки в нее нижнего предела:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b (f(x) \pm q(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b q(x)dx$.

3. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, C - постоянная.

4. Если интервал интегрирования [a,b] разбит на части [a,c] и [c,b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрически свойство это очевидно (рис.42).

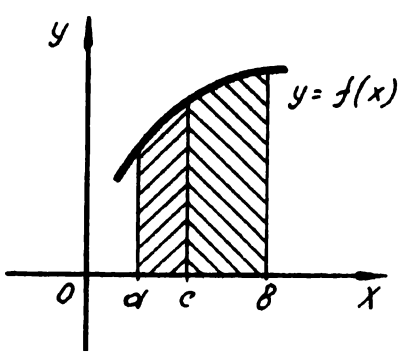


Рис. 42.

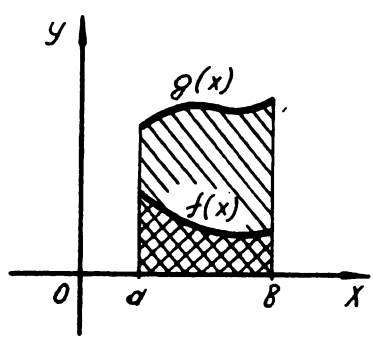


Рис. 43.

5. Если функция f(x)≥0 на интервале [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Если f(x)≤0 и b≥a, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

6. Если для всех x∈[a,b] выполняется условие f(x)≤q(x), то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b q(x)dx.$$

Геометрический смысл 5-6 свойств определенного интеграла показан на рис.43.

7. **Теорема о среднем значении.** Если f(x) - непрерывна на [a,b], то существует на этом отрезке точка ξ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Геометрически последнее утверждение означает, что есть такая точка ξ, a≤ξ≤b, что прямоугольник с основанием (b-a) и высотой f(ξ) равновелик площади криволинейной трапеции (рис.44).

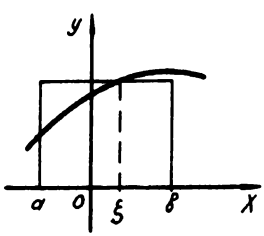


Рис. 44.

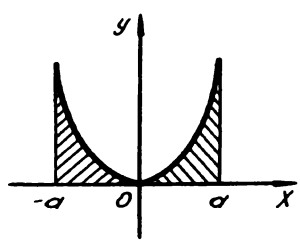


Рис. 45

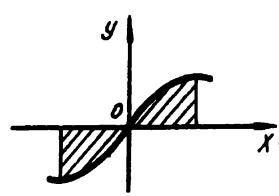


Рис. 46.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx$. При замене переменной в определенном интеграле отпадает необходимость возвращения к старой переменной.

Положим x=sin t, тогда dx=cos t dt. Найдем новые пределы интегрирования. Если x=0, то sin t=0 и t=0; если x=1, то sin t=1 и t=π/2.

Тогда получим

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$.

Заметим, что подынтегральная функция $y=x^3$ - нечетная, а область интегрирования - отрезок, симметричный относительно начала координат. Из геометрических соображений (рис.46) такой интеграл будет равен нулю. Действительно

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$$

Если f(x) - функция четная, а отрезок интегрирования [-a,a], то можно считать интеграл от 0 до a и удвоить:

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Рассмотрим, как применяется формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 xe^x\,dx$

Воспользуемся формулой: $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Возьмем в качестве u=x, $dv=e^x dx$. Тогда du=dx, $v=e^x$.

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1\cdot e^1 - e^x\Big|_0^1 = e-e+1 = 1.$$

§3. Несобственные интегралы.

Определение определенного интеграла было дано в предположении, что промежуток интегрирования [a,b] конечен и функция f(x) непрерывна на нем.

Мы рассмотрим случай, когда промежуток интегрирования будет бесконечен.

Например, в теории вероятностей большую роль играют интегралы $\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

$\int_a^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ и др. Такие интегралы называют несобственными.

Прежде, чем дать определение, рассмотрим пример.

Пример. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ непрерывна на бесконечном интервале[1, +∞). Поэтому, если A - любое конечное число, A>1, то существует интеграл $\int_1^A \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{A}$, который при A→+∞ имеет предел, равный единице.

Этот предел называют несобственным интегралом функции $\frac{1}{x^2}$ на бесконечном интервале [1, +∞) и обозначают символом $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$. Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} (1 - \frac{1}{A}) = 1.$$

Итак, если f(x) - непрерывная функция на бесконечном интервале [a, +∞) и если существует конечный предел $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом функции f(x) на интервале [a, +∞). Обозначают несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же

указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на интервале (-∞,b], (-∞,+∞):

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx,$$

где С - любая точка в интервале (-∞,+∞), оба интеграла стоящие справа сходятся.

Для несобственных интегралов сохраняются основные свойства определенных интегралов.

Например, как уже говорилось,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, имеет место аддитивность по интервалу интегрирования; интеграл от четной функции на интервале (-∞,+∞) можно свести к вычислению интеграла на интервале (0,+∞), а интеграл от нечетной функции на (-∞,+∞) равен нулю. Так, $xe^{\frac{-x^2}{2}}$ - нечетная, а $x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$ - четная функции.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^2e^{\frac{-x^2}{2}}dx = 0$$

В несобственном интеграле можно делать замену переменных. Например, пусть нужно вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 9}}dx.$$

Сделаем замену переменных $t = \frac{x-1}{3}$, $dt = \frac{dx}{3}$;

если x=1, то t=0, если x⟶+∞, то t⟶+∞.

Тогда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 9}}dx = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Приложение 1

Примеры решения задач

Пример 1. В какую сумму обратится долг, равный 10000$, выданный сроком на 5 лет:

а) при ставке простого процента, равной 5,5% годовых;

б) при ставке сложного процента, равной 5,5% годовых.

Решение. Первоначальную сумму долга обозначим буквой P, а буквой S - сумму, образовавшуюся к концу срока. Пусть i - ставка процентов (в десятичных дробях).

а) В нашей задаче P=10000$, i=0,055, n=5.

Подставим эти значения в формулу простых процентов и получим:

$S=P\times(1+n\times i)=10000\times(1+5\times0,055)=12750\$$.

б) По формуле сложных процентов имеем:

$S=P\times(1+i)^n=10000\times(1+0,055)^5=13069,6\$$.

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+x-1}{x^2+2}=\frac{2^3+2-1}{2^2+2}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Мы подставили в выражение функции вместо аргумента x его предельное значение 2 и получили конечное число $\frac{3}{2}$. Оно и будет искомым пределом.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-28}{3x^3+6x-29}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{28}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{6x}{x^3}-\frac{29}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{28}{x^3}}{3+\frac{6}{x^2}-\frac{29}{x^3}}=\frac{0}{3}=0.$$

Здесь при $x\to\infty$ и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Старшая степень числителя равна x^2, а знаменателя - x^3. Числитель и знаменатель дроби поделим на x^3 (от этого дробь не изменится) и вновь подставим предельное значение x. Мы знаем, что величины

$\frac{2}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{28}{x^3}, \frac{6}{x^2}, \frac{29}{x^3}$ являются бесконечно малыми величинами при $x \to \infty$ и их пределы равны нулю. Воспользуемся свойствами пределов (теоремы о пределе суммы, дроби) и получим искомое значение предела.

Заметим, что тот же результат можно получить, применяя правило вычисления предела отношения двух многочленов при «раскрытии» неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (см. пример 4, §9, гл. I).

Пример 4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-7x+21}{2x^3+3x^2+6x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{21}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}-\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{7}{x^2}+\frac{21}{x^3}}{2+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{5}{2}.$$

Тот же результат получим и при использовании упомянутого ранее правила.

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^x.$$

Решение.

Вычислим отдельно предел дроби

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}.$$

Будем искать теперь предел функции $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ при $x \to +\infty$. Так как показательная функция $y=a^x$ (при $a>1$) возрастающая, то $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x = \infty$, если

же $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x = 0$.

Итак, окончательно:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^x = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^x = 0.$$

Пример 6. Найти предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^x.$$

Решение.

Вычислим предел дроби

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+7} = \frac{1}{2}$$

Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая (основания $a = \frac{1}{2} < 1$), а потому

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^x = 0$, в то же время $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{2x+7}\right)^x = \infty$.

Пример 7. Найти производную функции

$$y = \frac{5}{x^3} + 3\sqrt[7]{x^6} - \frac{2}{\sqrt[6]{x^5}}.$$

Решение: $y = 5\cdot x^{-5} + 3\cdot x^{\frac{6}{7}} - 2\cdot x^{-\frac{5}{6}}$

$$y' = 5\cdot(-5)x^{-5-1} + 3\cdot\frac{6}{7}x^{\frac{6}{7}-1} - 2\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)x^{-\frac{5}{6}-1} =$$

$$= -25x^{-6} + \frac{18}{7}x^{-\frac{1}{7}} + \frac{10}{6}x^{-\frac{11}{6}} = -\frac{25}{x^6} + \frac{18}{7\sqrt[7]{x}} + \frac{5}{3\sqrt[6]{x^{11}}}$$

Пример 8. Найти производную функции $y = (x+1)^2 \times \sin x$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования произведения и сложной функции:

$$y' = ((x+1)^2)' \cdot \sin x + (x+1)^2 (\sin x)' =$$

$$= 2(x+1)(x+1)' \cdot \sin x + (x+1)^2 \cos x;$$

$$y' = 2(x+1) \cdot \sin x + (x+1)^2 \cos x =$$

$$= (x+1)(2\sin x + (x+1) \cdot \cos x)$$

Пример 9. Найти производную функции

$$y = \frac{3x+1}{x^2-2}.$$

Решение.

Используем здесь правило дифференцирования дроби

$$y' = \frac{(3x+1)'(x^2-2) - (x^2-2)'(3x+1)}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{3(x^2-2) - 2x(3x+1)}{(x^2-2)^2} = \frac{3x^2 - 6 - 6x^2 - 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-6 - 3x^2 - 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$y' = -\frac{(3x^2+2x+6)}{(x^2-2)^2}$$

Пример 10. Найти дифференциал функции $y = x \cdot e^{-x^2}$.

Решение.

Найдем производную этой функции:

$$y' = (x)' e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-x^2)' =$$

$$= e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

По определению дифференциала функции $dy = y'(x)dx$, поэтому

$dy = e^{-x^2}(1-2x^2)dx$.

Пример 11. Вычислить приближенное значение $\sqrt[5]{33}$.

Решение.

Преобразуем этот корень при помощи элементарных действий так:

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = \sqrt[5]{32(1+\frac{1}{32})} = 2\sqrt[5]{(1+\frac{1}{32})}.$$

Вычислим теперь приближенно $\sqrt[5]{(1+\frac{1}{32})}$. Рассмотрим это выражение как частное значение функции $y=\sqrt[5]{x}$ при $x=1+\frac{1}{32}$. Обозначим $x_0=1$, $\Delta x=\frac{1}{32}$. Нам надо найти приращение функции $y=\sqrt[5]{x}$ при изменении аргумента от значения x_0 до $x_0+\Delta x$. Примем

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy=f'(x_0)\Delta x.$$

Найдем «новое» значение функции

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=$$

$$=\sqrt[5]{x_0}+\frac{1}{5\sqrt[5]{x_0^4}}\Delta x=1+\frac{1}{5\times 32}=1{,}00625.$$

Окончательно получим $\sqrt[5]{33}=2\times 1{,}00625=2{,}0125$.

Погрешность вычислений при этом имеет порядок

$$k\cdot\Delta x^2=k\cdot\frac{1}{32^2}=k\cdot 0{,}03125.$$

Пример 12. Исследовать и построить график функции $y=\frac{x^2+1}{x-1}$.

Решение. 1) Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме x=1, при котором знаменатель обращается в нуль.

Вычислим $y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)-1}=-\frac{x^2+1}{x+1}$.

Данная функция является функцией общего вида.

2) Точка x=1 является точкой разрыва, при этом

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty.$$

В остальных точках числовой оси функция непрерывна.

3) Выясним вопрос о существовании асимптот. Из исследований предыдущего пункта следует, что прямая x=1 является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$, следательно, горизонтальных асимптот у графика нет. Вычислим

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту y=x+1.

4) Найдем производную

$$y' = \frac{(x^2+1)'(x-1) - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2};$$

$$y' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Стационарными точками являются корни уравнения $x^2-2x-1=0$, т.е. точки $x_1 = 1-\sqrt{2}, x_2 = 1+\sqrt{2}$ (в этих точках $y' = 0$). Исследуем знак производной в интервалах $(-\infty, 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}, 1)$, $(1, 1+\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Составим таблицу

x	$-\infty<x<1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}<x<1$	$1<x<1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}<x<\infty$
y′	+	0	-	-	0	+
y	возрастает	максимум $y_{max}(1-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})$	убывает	убывает	минимум $y_{min}(1+\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})$	возрастает

Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(x^2-2x-1)'(x-1)^2 - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Видно, что в области определения функции (x≠1) y'' не обращается в нуль, а значит, график функции не имеет точек перегиба.

Составим таблицу

x	$-\infty<x<1$	x=1	$1<x<\infty$
y''	–	не входит в область определения	+
y	график вогнутый		график выпуклый

6) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, график пересекает ось OY в точке (0,-1). На основании полученных данных строим график функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ (см. рис. 47).

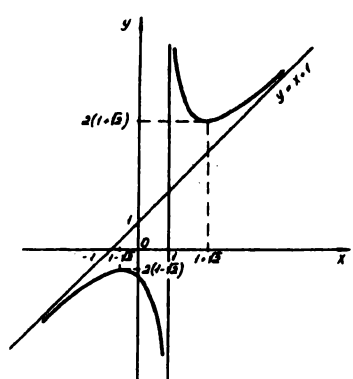


Рис. 47.

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$

Решение. Подынтегральную функцию разложим на сумму слагаемых и интегрируем каждое слагаемое в отдельности, используя табличный интеграл

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2\int x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{2}{3}} + C = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+5)^2}$$

Решение. Можно сделать замену Z=x+5:

$$\int \frac{dx}{(x+5)^2} = \int (x+5)^{-2} d(x+5) = \int z^{-2} dz =$$

$$= \frac{z^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x+5} + C$$

Пример 15. Вычислить интеграл

$$\int (x+1)e^{2x}dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int udv = u \times v - \int vdu.$$

Полагаем u=(x+1), dv=e^{2x}dx, тогда du=dx, $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$, а потому

$$\int (x+1)e^{2x}dx = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x+1) + C$$

Пример 16. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, прямыми x=-1 и x=2 и осью абсцисс (рис. 48).

Решение. Искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$, т.е.

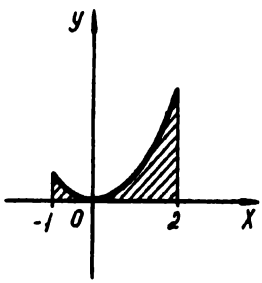


Рис. 48

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Пример 17. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=2-x^2$ и прямой $y=-x$ (рис. 49).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $y=-x$ с параболой $y=2-x^2$.

Решая систему $\begin{cases} y = -x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ получаем $x_1=-1$, $x_2=2$.

Это и есть пределы интегрирования. Искомая площадь фигуры равна: $S = \int_{-1}^{2}[(2-x^2)-(-x)]dx =$

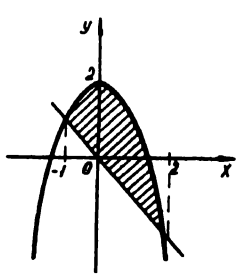


Рис. 49

$$= \int_{-1}^{2}(2-x^2+x)dx = \left|2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1.	Найти область определения функции	1. Выписать элементарные функции, из которых состоит данная функция 2. Записать в виде системы неравенств и равенств области определения выделенных элементарных функций 3. Найти решение полученной системы 4. Выписать область определения исходной функции – решение системы
2.	Вычисление пределов функций a) представляющих дробно-рациональную функцию; b) содержащих тригонометрические функции c) имеющих вид $(1+\alpha)^{\beta}$ где $\alpha \to 0, \beta \to \infty$	1. Подставить предельное значение аргумента в исследуемое выражение. Если при этом получено конечное значение, то оно является пределом данной функции 2. Определить тип неопределенности: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0,\infty], [1^{\infty}]$. Заметим, что $\left[\frac{1}{\infty}\right]$ и $\left[\frac{1}{0}\right]$ не являются неопределенностью, в первом случае предел равен нулю, во втором - ∞. Пояснение: a) если функция является дробно-рациональной (сл. a), то далее выполняются пункты 3, 4, 5 алгоритма; b) если функция содержит тригонометрические выражения, а неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ (сл. b), то далее выполняются пункты 6, 7 алгоритма. c) если выражение представляет неопределенность типа $[1^{\infty}]$ (сл. c), выполняется пункт 8. 3. Выписать старшую степень числителя и знаменателя x^n, если функция представляет собой дробно-рациональную и получена неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. 4. Поделить числитель и знаменатель функции на x^n. 5. Найти предел полученного выражения.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		6. Заменить данное выражение эквивалентным ему более простым выражением, используя таблицу эквивалентных бесконечно-малых (следствие из I замечательного предела): при $\alpha \to 0$ $\sin\alpha \sim \alpha$ $\quad arctg\,\alpha \sim \alpha$ $tg\alpha \sim \alpha$ $\quad 1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$ $\arcsin\alpha \sim \alpha$ 7. Найти предел эквивалентного выражения 8. Преобразовать выражение к виду, позволяющему использовать II замечательный предел.
3.	Вычисление производной сложной функции $y = (\varphi(x))$. Найти значение производной в заданной точке $x = x_0$	1. Выписать сложные функции, входящие в данную. 2. К каждой из выделенных сложных функций применить правило дифференцирования сложной функции $(f(\varphi(x))' = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$. 3. Записать производную данной функции, используя правила дифференцирования. 4. Подставить значение $x = x_0$ в полученное выражение производной.
4.	Найти интервалы монотонности функции $y = f(x)$, ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке [a,b].	1. Найти производную данной функции. 2. Найти стационарные точки кривой (точки, где $y'(x) = 0$) и точки, где $y' = (x)$ не существует. 3. Отметить на числовой оси найденные точки. 4. Определить знаки производной y' в каждом из полученных интервалов. 5. Выписать интервалы монотонности функции, воспользовавшись достаточным условием: при $y' < 0$ – функция убывает, при $y' > 0$ – возрастает. Интервалы должны принадлежать области определения функции. 6. Определить точки экстремума функции используя достаточное условие экстремума: если при переходе слева направо через критическую точку, в которой функция определена, производная

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		y' меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум. Если же при переходе через критическую точку y' меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. 7. Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку [a,b]. 8. Вычислить значения функции y в этих точках. 9. Вычислить значения y(a) и y(b). 10. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.
5.	Написать уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке с абсциссой x=x0	1. Вычислить значение $y' = y'(x)$ в точке $x = x_0$: $y'_0 = y'(x_0)$. 2. Вычислить значение функции при $x = x_0$ $y_0 = y(x_0)$. 3. Написать уравнение касательной $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.
6.	Применение определенного интеграла для вычисления площади плоской фигуры: a) ограниченной осью OX и графиком кривой y=f(x). b) ограниченную кривыми y=f(x) и y=φ(x) $(f(x) \geq \varphi(x))$ и прямыми x=a и x=b.	1. Построить графики граничных функций. Определить искомую фигуру. 2. Найти пределы интегрирования x=a, x=b. 3. Записать площадь искомой фигуры с помощью определенного интеграла по формулам: a) $S = \int_a^b f(x)dx$ (если $f(x) \geq 0$ на [a,b]), или $S = -\int_a^b f(x)dx$ (если $f(x) < 0$ на [a,b]) b) $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$. 4. Вычислить полученные интегралы. Воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница. 5. Выписать искомую площадь.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Найти область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} + \sqrt[4]{5x + 6}$.

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Выписать элементарные функции, из которых состоит данная функция	$u = \sqrt{3x - x^2 - 2}$ $U = \frac{1}{u}; Z = \sqrt[4]{5x - 6}$
2.	Записать области определения выделенных функций	$\begin{cases} 3x - x^2 - 2 \geq 0 \\ u \neq 0 \\ 5x - 6 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x - x^2 - 2 > 0 \\ 5x - 6 \geq 0 \end{cases}$
3.	Найти решение полученной системы	$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x \geq \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 2) \\ x \geq \frac{6}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq \frac{6}{5} \end{cases}$
4.	Выписать область определения исходной функции	$x \in [\frac{6}{5}; 2)$

Решите самостоятельно следующие задания:

Найти области определения следующих функций:

1. $y = \dfrac{2x}{3 + 2x - x^2}$.

2. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-3}} - \lg(2x-3)$.

3. $y = \dfrac{5x+1}{\ln(3x-2)}$.

4. $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$.

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6 + 5x - x^2}} + \lg(x^2 - 4x)$.

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание 1

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 6x - 7}{10x^2 + 2x + 1}$ (случай а)

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента в исследуемое выражение	$\frac{5(\infty)^2+6(\infty)-7}{10(\infty)^2+2(\infty)+1}$
2.	Определить тип неопределенности	$[\frac{\infty}{\infty}]$
3.	Выписать старшую степень числителя и знаменателя x^n	$x^n = x^2$
4.	Поделить числитель и знаменатель функции на x^n	$\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$
5.	Найти предел полученного выражения	$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7.}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

Задание 2

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2-2\cos 3x}{tg^2 2x}$ (случай b)

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента в исследуемое выражение	$\frac{2-2\cos 0}{tg^2 0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$
2.	Определить тип неопределенности	Неопределенность типа $[\frac{0}{0}]$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
3.	Заменить данное выражение эквивалентности ему более простым выражением используя таблицу эквивалентных бесконечно малых	$\frac{2-2\cos 3x}{tg^2 2x} = \frac{2(1-\cos 3x)}{tg^2 2x} \approx \frac{2\cdot\frac{9x^2}{2}}{4x^2} = \frac{9x^2}{4x^2}$
4.	Найти предел полученного эквивалентного выражения	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}$

Задание 3

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$ (случай b)

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента в исследуемое выражение.	$\left(\frac{2\cdot\infty+3}{2\cdot\infty-1}\right)^{\infty}$
2.	Определить тип неопределенности.	$[1^{\infty}]$
3.	Преобразовать выражение к виду, позволяющему использовать II замечательный предел	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)+4}{(2x-1)}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{(2x-1)}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4x}{2x-1}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}} = e^2$

Решите самостоятельно следующие задания:

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+3}{x^4+2x^2-3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{3+2x-x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{2x+3}\right)^{x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin 5x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Вычислить производную функции y в точке x=1.

$$y = \sqrt{\ln(3x+1)} + \sin^3 x - \frac{1}{(2x-3)}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Выписать сложные функции, входящие в данную	1. $Z_1 = \sqrt{\varphi(u)}$, $\varphi(u) = \ln(u)$, $u = (3x + 1)$; 2. $Z_2 = V^3$, $V(x) = \sin x$; $Z_3 = \frac{1}{t}$, $t(x) = 2x - 3$.
2.	К каждой из выделенных функций применить правило дифференцирования сложной функции	1. $Z_1' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln(3x+1)}} \cdot (\ln(3x+1)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln(3x+1)}} \cdot \frac{1}{3x+1} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{2(3x+1) \cdot \sqrt{\ln(3x+1)}}$; 2. $Z_2' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$; 3. $Z_3' = -\frac{1}{t^2} \cdot t' = -\frac{1}{(2x-3)^2} \cdot (2x-3)' = -\frac{2}{(2x-3)^2}$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
3.	Записать производную данной функции, используя правила дифференцирования	$y' = \frac{3}{2(3x+1)\cdot\sqrt{\ln(3x+1)}} + 3\sin^2 x\cdot\cos x - \frac{2}{(2x-3)^2}$.
4.	Подставить значение x = 1 в полученное выражение производной	$y'(1) = \frac{3}{2\cdot 4\sqrt{\ln 4}} + 3\sin^2 1\cdot\cos 1 - \frac{2}{(2-3)^2} = \frac{3}{8\sqrt{\ln 4}} + 3\sin^2 1\cdot\cos 1 - 2$.

Решите самостоятельно следующие задания:

Найти производные:

1. $y = 7(x-1)^3 - \frac{8x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{9x+3}{\sqrt[3]{x^2}}$ в точке x_0=1;

2. $y = \frac{x}{e^{2x-1}}$

3. $y = \sqrt{\sin(2x+1)} + \ln(x^2+5x)$

4. $y = 2^{x^2-1}\cdot tg\sqrt{x}$

5. $y = e^{x^2+5x}\cdot\ln(2x+5) - \sqrt[3]{(2x+5)}$ в точке $x_0 = -1$.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \frac{4x+2}{(x+1)^2}$.

Вычислить наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-\frac{1}{2};2]$.

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Найти производную данной функции	$y' = \frac{(4x+2)' \cdot (x+1)^2 - (4x+2) \cdot [(x+1)^2]'}{(x+1)^4} = \frac{4(x+1)^2 - 2(2x+1) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(x+1)(x+1-2x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-4x}{(x+1)^3}$;
2.	Найти стационарные точки кривой и те точки, где $y'(x)$ не существует	$x_1 = 0$ y' не существует при $x_2 = -1$
3.	Отметить на числовой оси найденные точки	−1 0 --------●----------●---------->
4.	Определить знаки производной y' в каждом из полученных интервалов	
5.	Выписать интервалы монотонности функции, воспользовавшись достаточным условием: при $y' < 0$ – функция убывает; $y' > 0$ – функция возрастает	Интервал возрастания: (-1, 0) Интервалы убывания: $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
6.	Определить точки экстремума функции	В точке x = 0 функция имеет максимум $y_{max}(0) = 2$. В критической точке x = -1 функция не существует
7.	Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку $[\frac{1}{2}; 2]$	$x_1 = 0$
8.	Вычислить значение функции в этих точках	$y(0) = 2$
9.	Вычислить значения $y(-\frac{1}{2})$ и $y(2)$	$y(-\frac{1}{2}) = 0; y(2) = \frac{10}{9}$
10.	Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее	Наибольшее значение: $y_{наиб.}(0) = 2$ Наименьшее значение: $y_{наим}(-\frac{1}{2}) = 0$.

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Вычислить наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0;5].

Задание 2

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{e^x}{x+1}$.

Вычислить наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

Задание 3

Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{\ln x}{x}$. Вычислить наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [1;4].

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Вычислить значение y' в точке $x_0 = -1$	$y' = 2x + 6;$ $y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$
2.	Вычислить значение функции при $x = -1$	$y_0 = y(-1) = (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 1 = -4$
3.	Написать уравнение касательной $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$	$y - (-4) = 4(x - (-1))$ или $y = 4x$

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Написать уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 + 4x + 1$ в точке с абсциссой x_0=2.

Задание 2

Написать уравнение касательной к кривой $y = 2 + x - x^3$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

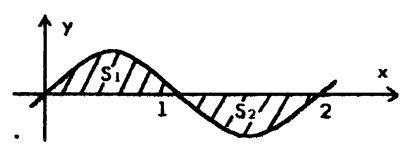
6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №6

Задание 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ (случай а)

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Построить графики граничных функций. Определить искомую фигуру	Искомая фигура представляет собой две криволинейные трапеции S_1 и S_2 
2.	Найти пределы интегрирования	Данная кривая пересекает ось ОХ в трех точках. $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ при $x_1 = 0;\ x_2 = 1; x_3 = 2.$ Пределы интегрирования $x_1 = 0;$ $x_2 = 1;$ и $x_3 = 1; x_4 = 2.$
3.	Записать площадь искомой фигуры с помощью определенного интеграла	$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx$ $S_2 = -\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx$ $S = S_1 + S_2$

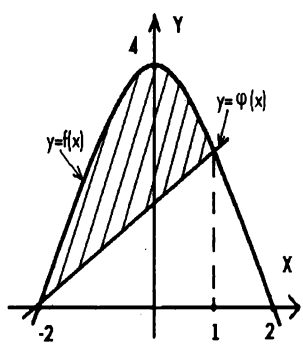
4.	Вычислить полученные интегралы	$S_1 = (\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$ $S_2 = (-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2)\Big\|_1^2 = \frac{1}{4}$
5.	Выписать искомую площадь	$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; S = \frac{1}{2}$

Задание 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$ (случай b)

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Построить графики граничных функций. Определить искомую фигуру	
2.	Найти пределы интегрирования	Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2 = 4 - x^2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{array}$ или $x_1 = -2 \quad x_2 = 1$
3.	Записать площадь искомой фигуры с помощью определенного интеграла по формуле $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$	$S = \int_{-2}^{1} [(4 - x^2) - (x + 2)]dx$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
4.	Вычислить полученный интеграл. Воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница $\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b)-F(a)$	$S = \int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx = (2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})\Big\|_{-2}^{1} = (2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})-(-4+\frac{8}{3}-2) = \frac{9}{2}$
5.	Выписать искомую площадь	Ответ: $S = \frac{9}{2}$

Решите самостоятельно следующие задания:

Вычислить площадь, ограниченную кривыми:

1. $y = 2x - x^2$, $y = -x$;

2. $y = \frac{x^2}{3}$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$;

3. $y = x^3$, $y^2 = x$

4. $y = -x^2 + 6x - 5$ и осью OX

5. $y = 9 - x^2$ и $y = 3 - x$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Составьте логическую схему базы знаний по теме курса.*

2. Решите самостоятельно следующие задачи (воспользуйтесь примерами в приложении 1).

Дана функция y=f(x). Найти:
1) область определения функции;
2) точки пересечения функции y=f(x) с осью OX (если это возможно);
3) исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
4) точки разрыва;
5) вертикальные и наклонные асимптоты;
6) интервалы монотонности;
7) точки экстремумов;
8) точки перегиба и характер выпуклости;
9) построить график функции;
10) вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком y=f(x), осью OX и прямыми x=a и x=b. Функция y=f(x), отрезок [a,b] даны в таблице 1.
11) проверить свойство аддитивности по области интегрирования для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$$

при следующих значениях параметров:

1°. $a = -1, b = 35, c =$ № студента в списке группы.

2°. В качестве функций f(x) рассмотреть следующие три функции:
a) f(x)=1, b) f(x)=x, c) $f(x)=x^2$.

12) вычислить следующие несобственные интегралы:

a) $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx$; b) $\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx$; c) $\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx$,

где параметр λ равен номеру студента по списку группы.

Замечание. Для вычисления интегралов b) и c) воспользоваться методом интегрирования по частям в определенном интеграле.

Таблица 1

№ варианта	Функция y=f(x)	Пределы интегрирования	
		a	b
1	$y = \frac{1}{x(x-8)}$	1	5
2	$y = (x+2)^2(x-1)$	-2	1
3	$y = \frac{3}{x^2+9}$	-3	3

№ варианта	Функция y=f(x)	Пределы интегрирования	
		a	b
4*	$y = 2 + x^2 - \frac{x^4}{2}$	-1	1
5	$y = (x+1)^3(2x-3)$	0	1
6*	$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$	-3	0
7	$y = \frac{x^2}{x+1}$	0	1
8	$y = \frac{x}{x^2+4}$	-2	2
9*	$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$	-1	0
10	$y = -\frac{(1+2x)}{(1+x)^2}$	0	2
11	$y = \frac{2x}{1+x^2}$	0	1
12	$y = x + \frac{4}{x+2}$	0	2
13	$y = x - \frac{1}{x^3}$	1	2
14	$y = xe^x$	-2	0
15	$y = \frac{x^2+8}{4-x^2}$	-1	1
16	$y = \frac{1}{x(x-8)}$	1	5
17	$y = (x-1)(x+2)^2$	-2	1
18	$y = \frac{3}{9+x^2}$	-3	3

Примечание: Знаком (*) отмечены задания, в которых координаты точек пересечения графика с осью OX можно не вычислять.

№ вари-анта	Функция y=f(x)	Пределы интегрирования	
		a	b
19*	$y=\frac{4+2x^2-x^4}{2}$	-1	1
20	$y=(2x-3)(x+1)^3$	0	1
21*	$y=15-36x+3x^2+2x^3$	-3	0
22	$y=\frac{x^2}{x+1}$	0	1
23	$y=\frac{x}{x^2+4}$	-2	2
24*	$y=x^3-9x^2+15x-3$	-1	0
25	$y=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$	0	2
26	$y=\frac{2x}{x^2+1}$	0	1
27	$y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$	0	2
28	$y=\frac{x^4-1}{x^3}$	1	2
29	$y=xe^x$	-2	0
30	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$	-1	1

МАТЕМАТИКА
Базовый курс
ЮНИТА 3
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Редактор Н.М. Пилипенко
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998 Сдано в печать 19.11.2001 г.
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 50000. Заказ 4048.

Современный Гуманитарный Университет
Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.